

Extrempunkte und Stützpunkte
in Familien
nicht-verschwindender
analytischer Funktionen

Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

von
Wolfram Koepf
aus Stuttgart

1984



Extrempunkte und Stützpunkte
in Familien
nicht-verschwindender
analytischer Funktionen

Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

von
Wolfram Koepf
aus Stuttgart

1984



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548817_0091

Betreuer: Prof. Dr. J. Becker (TU Berlin)
Prof. Dr. H. Begehr
Prof. Dr. F. Huckemann (TU Berlin)

Gutachter: Prof. Dr. J. Becker (TU Berlin)
Prof. Dr. St. Ruscheweyh (Universität Würzburg)
Prof. Dr. H. Begehr

Termin der mündlichen Prüfung: 23.7.1984

Für die Betreuung bedanke ich mich bei
Prof. Dr. Becker, Prof. Dr. Begehr sowie
Prof. Dr. Huckemann.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I Einführung	1
- Extrempunkte	1
- Stützpunkte	2
- Definition der betrachteten Funktionenfamilien	3
II Maximale Extrem- und Stützpunkte	7
- Subordination	7
- Subordinationshalbordnung und subordinationsinvariante Familien	8
- Die extremale Subordinationseigenschaft	9
III Extremalprobleme in Familien mit einfacher Maximalstruktur	14
- BCK-Funktionen und einfache Familien	14
- Extrem- und Stützpunkte in einfachen Familien	15
- Konstruktion von BCK-Funktionen	19
IV Betrachtung spezieller einfacher Familien	24
- Die Familien P_O^α	24
- Folgerungen aus der Subordination	28
- Exponierte Punkte	36
- Das Koeffizientenproblem	38
V Familien von Funktionen, deren Bildgebiete geometrische Eigenschaften besitzen	40
- Konvexe Funktionen	40
- Sternförmige Funktionen	42
- Nahezu-konvexe Funktionen	45
- Funktionen mit beschränkter Randdrehung	47
- Konvexe Funktionen in Richtung der imaginären Achse	48
- Funktionen mit symmetrischen Bildgebieten	50
VI Familien von Funktionen mit reellen Koeffizienten	53
Anhang	60
- Die Sätze von Kreĭn-Mil'man und Choquet	60
- Folgerungen und weitere Aussagen	60
- Notationen	64
Literaturverzeichnis	67

I. Einführung

Extrempunkte

Sei A die Familie der analytischen Funktionen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$. Versehen mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz ist A ein metrisierbarer lokal-konvexer Vektorraum.

Topologische Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit oder Kompaktheit beziehen sich immer auf diese Topologie.

Eine abgeschlossene Teilmenge F von A ist genau dann kompakt, wenn sie lokal gleichmäßig beschränkt ist. Die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\text{co}} F$ einer kompakten Menge F ist somit ebenfalls kompakt.

Als *Extrempunkt* einer Teilmenge F eines Vektorraums wird ein Punkt bezeichnet, der sich nicht konvex mittels anderer Punkte aus F darstellen läßt. Mit EF bezeichnen wir die Menge der Extrempunkte von F . In lokal-konvexen Räumen besagt der Satz von Krein-Mil'man, daß die Extrempunkte einer kompakten Menge die abgeschlossene konvexe Hülle aufspannen, also $\overline{\text{co}} EF = \overline{\text{co}} F$.

Ist auch $\overline{\text{co}} F$ kompakt - also innerhalb A immer bereits, wenn F kompakt ist - liegen die Extrempunkte von $\overline{\text{co}} F$ alle in F .

Eine Vertiefung des Satzes von Krein-Mil'man stellt der Satz von Choquet dar, der für metrisierbare Räume gilt (siehe dazu auch im funktionalanalytischen Anhang). Die Darstellbarkeit der Punkte einer kompakten konvexen Menge mit Hilfe der Extrempunkte läuft im metrisierbaren Fall auf eine Integraldarstellung mit Wahrscheinlichkeitsmaßen hinaus, deren Träger die Menge der Extrempunkte ist.

Als Beispiel für die vorliegende Situation dient die Familie

$$(1) \quad P := \{f \in A \mid f(0) = 1, \operatorname{Re} f > 0\}$$

der Funktionen mit positivem Realteil.

Die Formel von Herglotz, die er 1911 [22] ermittelte, besagt,

daß jede Funktion p aus P eine Darstellung der Form

$$(2) \quad p(z) = \int_X \frac{1+xz}{1-xz} d\mu(x) \quad , \quad X := \{x \mid |x| = 1\}$$

hat, wobei μ ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß über X ist.

Es zeigt sich, daß die Extrempunkte von P

$$(3) \quad EP = \{f \mid f(z) = \frac{1+xz}{1-xz} \quad , \quad |x| = 1\}$$

die Kernfunktionen sind, und wegen der Parametrisierung von EP über X liegt eine Integraldarstellung über X vor. Wegen des Satzes von Choquet sind (2) und (3) äquivalent. Für die Details der Anwendung der Sätze von Kreĭn-Mil'man und Choquet sei auf die Darstellungen in Brickman, MacGregor und Wilken [9], Clunie [12], Phelps [34] und Schober [40] verwiesen.

Stützpunkte

Extrempunkte sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil unter den Lösungen eines linearen Extremalproblems stets ein Extrempunkt ist.

Sei A' der Dualraum von A , d.h. der Raum der stetigen linearen Funktionale in A .

Ist $L \in A'$, so heißt $f \in F$ *Stützpunkt bezüglich L von F* , wenn $(\operatorname{Re} Lf \geq \operatorname{Re} Lg \text{ für alle } g \in F)$ und L nicht konstant in F ist.

Ist f der einzige Stützpunkt bzgl. L , so nennen wir ihn *exponiert*.

Die Menge der Stützpunkte bzgl. L von F bezeichnen wir mit $\operatorname{Spt}_L F$, die Menge aller Stützpunkte in F mit $\operatorname{Spt} F$ und die Menge der exponierten Punkte mit $\operatorname{Exp} F$.

Ein Extrempunkt ist nicht notwendigerweise ein Stützpunkt, und umgekehrt weiß man im allgemeinen nicht, ob alle Stützpunkte extrem sind. Lediglich zwei Feststellungen gelten für eine kompakte Familie F . Erstens gibt es zu jedem nicht konstanten Funktional $L \in A'$ einen Stützpunkt, der in $\overline{\operatorname{Eco}} F$ liegt, und zweitens liegt

jeder exponierte Punkt auch in $\overline{\text{Eco}} F$.

Im Anhang sind weitere Aussagen zusammengetragen, die innerhalb dieser Arbeit wesentlich benutzt werden.

Definition der betrachteten Funktionenfamilien

Wir betrachten hier vor allem Familien nicht-verschwindender Funktionen, das sind Teilmengen von

$$(4) \quad N_0 := \{f \in A \mid f(0) = 1, f(z) \neq 0\}.$$

Die Familie S_0 der schlichten N_0 -Funktionen wurde von Duren und Schober [14]-[15], Hamilton [20] u.a. untersucht. Davor waren hauptsächlich Familien der Normierungsklasse

$$(5) \quad N := \{f \in A \mid f(0) = 0, f'(0) = 1\}$$

untersucht worden. Insbesondere für Familien, die über besondere geometrische Eigenschaften des Bildgebiets definiert werden, sind in den siebziger Jahren viele Ergebnisse zustande gekommen. Wir betrachten folgende Funktionenfamilien:

$$(6) \quad S^* := \{f \in A \mid f \text{ schlicht}\},$$

$$(7) \quad K^* := \{f \in S^* \mid f \text{ ist konvex}\},$$

$$(8) \quad St^{a^*} := \{f \in S^* \mid f \text{ ist sternförmig bezüglich } a\},$$

$$(9) \quad St^* := \bigcup_{a \in \mathbb{C}} St^{a^*},$$

$$(10) \quad C^* := \{f \in S^* \mid \exists \varphi \in K^* (\operatorname{Re} \frac{f'}{\varphi'} > 0)\}$$

(siehe dazu die analytische Definition von Kaplan [24] und die geometrische Beschreibung von Biernacki [3] und Lewandowski [27]-[28]).

In Verallgemeinerung dazu betrachten wir auch die (für $\beta > 1$ nicht nur aus schlichten Funktionen bestehenden) Familien

$$(11) \quad C^*(\beta) := \{f \in A \mid \exists \varphi \in K^* (|\arg \frac{f'}{\varphi'}| \leq \beta \frac{\pi}{2})\}$$

für ein $\beta \in [0, \infty[$ (siehe dazu die geometrische Beschreibung für $\beta \in [0, 1]$ von Pommerenke [36] und Reade [37]) .

Bekannte Teilmengen von $C^*(\beta)$ sind die Familien von Funktionen beschränkter Randdrehung

$$(12) \quad V^*(k) := \{f \in A \mid \text{Randdrehung von } f \leq k\pi\}$$

für ein $k \in [2, \infty[$ (siehe dazu die Arbeit von Paatero [31]),
für die gilt

$$(13) \quad V^*(k) \subset C^*(k/2-1)$$

(siehe z.B. Schober [40], S. 24).

Eine nicht uninteressante (durch die asymmetrische Definition etwas aus dem Rahmen fallende) Familie ist

$$(14) \quad KI^* := \{f \in S^* \mid f \text{ } \mathbb{D} \text{ konvex in Richtung der imaginären Achse}\}$$

(siehe Robertson [38]).

Die Notation $F := F^* \cap N$ für ein F^* der obigen Liste liefert uns die wohlbekannten normierten Funktionenfamilien.

Die Familie S ist schon vielfältig auf Extremalprobleme hin untersucht worden; vor allem diesen Ergebnissen sind die Monographien von Duren [13], Pommerenke [35] und Schober [40] gewidmet.

Alle oben definierten normierten Familien sind kompakt, und somit hat jedes stetige Extremalproblem eine Lösung. Die Extrempunkte der abgeschlossenen konvexen Hüllen enthalten Lösungen für jedes Extremalproblem bzgl. eines stetigen linearen Funktionals.

Folgende Ergebnisse wurden in den Arbeiten von Brickman, MacGregor und Wilken (BMW) [9], Brannan, Clunie und Kirwan (BCK) [4], Grassmann, Hengartner und Schober (GHS) [17], Hengartner, Plüger und Schober (HPS) [21], Hornblower und Wilken [23] erarbeitet.

Wir vereinbaren die Bezeichnungen X und Y für die Einheitskreislinien der x - bzw. y -Ebene.

$$(15) \quad \overline{\text{Eco}} K = \text{Spt } K = \text{Exp } K = \{f | f(z) = \frac{z}{1-xz}, x \in X\},$$

$$(16) \quad \overline{\text{Eco}} \text{St}^0 = \text{Spt } \text{St}^0 = \text{Exp } \text{St}^0 = \{f | f(z) = \frac{z}{(1-xz)^2}, x \in X\},$$

$$(17) \quad \overline{\text{Eco}} C = \text{Spt } C = \text{Exp } C = \\ = \{f \in N | f'(z) = \frac{(1+xz)}{(1-yz)^3}, x \in X, y \in Y, x \neq -y\}.$$

Ferner gilt für $\alpha \geq 2$:

$$(18) \quad \overline{\text{co}} V(2\alpha) = \overline{\text{co}} C(\alpha-1),$$

$$(19) \quad \overline{\text{Eco}} V(2\alpha) \subset \{f \in N | f'(z) = \frac{(1+xz)^{\alpha-1}}{(1-yz)^{\alpha+1}}, x \in X, y \in Y, x \neq -y\} =: M_\alpha,$$

$$(20) \quad \text{Spt } V(2\alpha) \subset M_\alpha.$$

Wir werden hier Familien der Form $F_\circ := F^* \cap N_\circ$ betrachten, und es scheint zunächst naheliegend, daß es möglich sein müßte, von den entsprechenden Ergebnissen der bzgl. N normierten Familien zu Ergebnissen über Extrem- oder Stützpunkte zu kommen.

Aber in beiden Fällen scheitert diese Vorgehensweise an der Tatsache, daß für $f \in N_\circ$ der Wert $f'(0)$ variabel ist.

Wir werden hier zu Ergebnissen auf direktem Weg gelangen, und wir werden sehen, daß sie sich nahezu rein geometrisch ableiten lassen, im Gegensatz zu den analytischen Beweisführungen bei den N -Familien.

Die beiden Normierungen sind in bezug auf die Geometrie auch von grundsätzlichem Unterschied: Funktionen in $N_\circ$ entsprechen Gebieten G mit der einfachen geometrischen Eigenschaft $1 \in G$ und $0 \notin G$.

Die Klasse N wurde durch eine analytische Normierung erklärt, die nicht eine unmittelbare geometrische Deutung zuläßt.

Bei der Lösung konkreter Extremalprobleme in dieser Arbeit gehen wir konstruktiv vor. Die Resultate sind daher alle scharf, und die Extremalfunktionen sind der jeweiligen Konstruktion zu entnehmen und werden in der Formulierung der Sätze nicht explizit aufgeführt.

II. Maximale Extrem- und Stützpunkte

Subordination

Wir betrachten noch einmal das Beispiel P .

Der Satz von Herglotz besagt (siehe BMW [9], Th. 1, Clunie [12], S.138)

$$(1) \quad EP = \{f \mid f(z) = \frac{1+yz}{1-yz}, y \in Y\} =: E$$

und es liegt die Frage nahe, welche Bedeutung die beiden Inklusionen $EP \subset E$ und $E \subset EP$ besitzen.

Wir werden zeigen, daß aus geometrischen Gründen die Aussage

$$(2) \quad EP \supset E$$

zwingend und sozusagen a priori gültig ist. Die eigentliche Tiefe des Herglotzschen Satzes liegt in der Beziehung

$$(3) \quad EP \subset E,$$

d.h. der Aussage, daß weitere Extrempunkte nicht existieren.

Relation (2) wurde mit analytischen Methoden von Hallenbeck und MacGregor (HM) [18], Theorem 6, in einem allgemeineren Konzept gezeigt, da P eine Subordinationseigenschaft besitzt. Wir gehen einen anderen Weg, gehen von der Geometrie aus und erhalten allgemeinere Resultate. Auch wir benötigen dazu wesentlich den Begriff der Subordination.

Definition

Sei $B := \{\omega \in A \mid \omega(0) = 0, |\omega| < 1\}$.

Sind $f, g \in A$, dann heißt f *subordiniert* zu g oder $f < g :\Leftrightarrow \exists \omega \in B (f = g \circ \omega)$.

Geometrisch bedeutet der Begriff der Subordination für eine schlichte Funktion g , daß das Bildgebiet von f im Bildgebiet von g enthalten ist.

Automatisch gilt dies dann auch für die Bilder von Kreisscheiben um den Ursprung mit einem Radius kleiner als 1 als Folge des Schwarzschen Lemmas.

Weitere Eigenschaften der Subordination sind z.B. in jeder der Monographien [13], [35], [40] zu finden.

Subordinationshalbordnung und subordinationsinvariante Familien

Die Menge $(N_0, <)$ ist halbgeordnet, sofern wir in naheliegender Weise Äquivalenzklassen von zueinander gegenseitig subordinierten Funktionen betrachten. Die Äquivalenzklassen sind die Mengen

$$[f] := \{g \mid g(z) = f(xz), x \in X\}.$$

Mit $\text{Max } F$ bezeichnen wir die in F liegenden maximalen Elemente von F bezüglich $<$.

Wir betrachten nun spezielle Familien.

Definition.

Für $F \subset A$ heißt $\text{Sub } F := \{g \mid g < f, f \in F\}$ die *subordinationsinvariante Hülle* von F . Falls $F = \text{Sub } F$ ist, nennen wir F *subordinationsinvariant*.

Es ist offenbar, daß die subordinationsinvariante Hülle einer kompakten Familie F von deren maximalen Elementen erzeugt wird, also:

Lemma 1.

$$F \subset N_0 \text{ kompakt} \Rightarrow \text{Sub } F = \text{Sub Max } F.$$

(siehe auch Brickman und Wilken (BW) [10], Theorem 1).

Ebenso läßt sich ohne großen Aufwand eine weitere Aussage beweisen.

Dazu definieren wir einen auch später häufig gebrauchten Begriff.

Definition.

Die Familie $F \subset A$ heißt *drehungsinvariant*, wenn sie mit jedem Element f dessen Äquivalenzklasse $[f]$ enthält (s. auch BW [10]).

Lemma 2.

$$F \subset N_0 \text{ kompakt} \Rightarrow \text{Max } F \subset \text{Max Sub } F$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\text{Max } F$ drehungsinvariant ist.

Außerdem gelten folgende Aussagen:

Lemma 3.

- (a) Eine subordinationsinvariante Familie ist drehungsinvariant.
- (b) F drehungsinvariant $\Rightarrow \text{Max } F$ drehungsinvariant.

Die extremale Subordinationseigenschaft

Wir werden nun zeigen, daß zwischen linearen Extremalproblemen und der Subordinationshalbordnung ein Zusammenhang besteht.

(Diesen Zusammenhang vermutet man z.B. bei der Betrachtung der Klasse P von Funktionen mit positivem Realteil.)

Wir definieren dazu zunächst den Begriff der extremalen Subordinationseigenschaft (ESE), die eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß in Bezug auf die Halbordnung größere Elemente Extremaleigenschaften von kleineren erben.

Definition.

$F \subset N_0$ heißt *stark* (oder *hat die ESE*) : $\Leftrightarrow$ aus $h < g$ mit $h = g \circ \omega$, $h \in F$, $g \in F$ folgt: $f \circ \omega \in F$ für alle $f \in F$.

Beispiele für starke Mengen sind beliebige subordinationsinvariante Familien, aber auch S_0 , weil hier ω schlicht ist. $S_0(R) := \{f \in S_0 \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ist stark, da hier ω reelle Koeffizienten hat.

Der Durchschnitt starker Mengen ist stark.

Der folgende Satz ist eine naheliegende Verallgemeinerung eines in letzter Zeit vielfach benutzten Sachverhalts, der in S angewendet wurde. Die im wesentlichen benötigte Eigenschaft von S (auf die Normierung N übertragen) ist die eben definierte extremale Subordinationseigenschaft.

Siehe dazu Schaeffer und Spencer [39], Lemma XXIX, sowie [33], [16], [25], [8], [7], [6].

Satz 4.

Ist F stark, h nicht konstant, $g \in F$ und $h = g \circ \omega$, $\omega \in B$, so gilt

$$(a) \quad \begin{aligned} h \in EF &\Rightarrow g \in EF, \\ h \in \overline{Eco} F &\Rightarrow g \in \overline{Eco} F. \end{aligned}$$

(b) Ist ferner $L \in A'$ nicht konstant in F und K das durch

$$K(f) := L(f \circ \omega)$$

definierte Funktional in A' , so folgt

$$\begin{aligned} h \in \text{Spt}_L F &\Rightarrow g \in \text{Spt}_K F \text{ oder } K \text{ ist konstant in } F, \\ h \in \text{Exp } F &\Rightarrow g \in \text{Exp } F. \end{aligned}$$

Beweis.

(a) Wäre $g \notin \overline{Eco} F$, also $g = tg_1 + (1-t)g_2$ mit $t \in]0,1[$, $g_1 \neq g_2$ und $g_k \in \overline{co} F$, dann hätte wegen

$$h = g \circ \omega$$

h eine Darstellung der Form

$$h = th_1 + (1-t)h_2 \quad \text{mit} \quad h_k := g_k \circ \omega.$$

Im ersten Fall liegt nun wegen der ESE h_k in F , und wir bekommen eine Darstellung in F und damit einen Widerspruch.

Im zweiten Fall benötigen wir für den Widerspruch, daß h_k in $\overline{co} F$ liegt.

Wir zeigen dies, indem wir aus der ESE folgern:

$$\text{aus } h = g \circ \omega, \quad h \in F, \quad g \in F \text{ folgt:}$$

$$f \circ \omega \in \overline{\text{co}} F \quad \text{für alle } f \in \overline{\text{co}} F.$$

Für jedes $f \in \overline{\text{co}} F$ gilt $f = \lim f_n$ mit

$$f_n = \sum_k t_k f_{kn}, \quad \sum_k t_k = 1, \quad t_k \geq 0, \quad f_{kn} \in F.$$

Für alle f_{kn} gilt $f_{kn} \circ \omega \in F$, also hat auch die Funktion $f_n \circ \omega$ eine Darstellung innerhalb F , und

$$f \circ \omega = \lim f_n \circ \omega$$

liegt somit in $\overline{\text{co}} F$.

(b) Ist h Stützpunkt oder exponiert bzgl. L , so gilt

$$\text{Re } Lh \geq \text{Re } Lf \quad \text{für alle } f \in F \setminus \{h\}.$$

Da nach Voraussetzung für jedes $g^* \in F$ die Funktion $f := g^* \circ \omega$ in F liegt, gilt dann

$$\text{Re } Kg = \text{Re } Lh \geq \text{Re } Lf = \text{Re } Kg^*$$

für alle $g^* \in F \setminus \{g\}$.

Also folgen unsere Behauptungen. $\square$

Bemerkung 1.

Satz 4 läßt sich offenbar dazu benutzen, die Menge der Extrempunkte einer starken Menge einzuschließen. Hat man nämlich für eine Funktion eine konvexe Darstellung, so kommen kleinere Elemente nicht mehr als Extrempunkte in Betracht.

Bemerkung 2.

Die mögliche Konstanz von K läßt sich in Familien, die groß genug sind, im allgemeinen a priori ausschließen. Siehe dazu z.B. [8].

Wir zeigen nun, daß es einen Zusammenhang zwischen maximalen Elementen und Extrem- oder Stützpunkten in kompakten Teilmengen von N_0 immer gibt.

Satz 5.

Eine kompakte Menge $F \subset N_0$, $F \neq \{f\}$, hat die Eigenschaften:

- (a) $\text{Max } F \cap \overline{\text{Eco}} F \neq \emptyset$,
- (b) $\text{Max } F \cap \text{Spt } F \neq \emptyset$,
- (c) $(\text{Exp Sub } F \neq \emptyset) \Rightarrow (\text{Max } F \cap \text{Exp } F \neq \emptyset)$.

Enthält speziell $\text{Max } F$ nur Elemente einer einzigen Äquivalenzklasse, so gilt sogar

- (d) $\text{Max } F \subset \overline{\text{Eco}} F$.

Beweis.

(a) Da F kompakt ist, ist auch die Menge $\text{Sub } F$ kompakt (siehe MacGregor [29], S. 365). Nach dem Satz von Kreĭn-Mil'man gibt es also eine nicht konstante Funktion $f \in \text{Sub } F$ mit $f \in \overline{\text{Eco}} \text{Sub } F$. Außerdem gibt es wegen Lemma 1 ein $g \in \text{Max } F$, sodaß $f < g$. Nun läßt sich, da $\text{Sub } F$ stark ist, Satz 4(a) anwenden, und wir erhalten zunächst

$$g \in \text{Max } F \cap \overline{\text{Eco}} \text{Sub } F,$$

und mit A5 (a) folgt

$$g \in \text{Max } F \cap \overline{\text{Eco}} F.$$

(c) wird analog mit Satz 4(b) und A5(c) bewiesen.

(b) Sei $k := \min \{n \in \mathbb{N} \mid a_n(f) \neq 0 \text{ für ein } f \in F\}$. Sei ferner $H := \{f \in F \mid |a_k(f)| \geq |a_k(g)| \text{ für alle } g \in F\}$. H enthält wegen des Schwarzschen Lemmas nur maximale Elemente. Außerdem enthält H entweder einen Stützpunkt bzgl. eines Funktional vom Typ $L(f) = w a_k(f)$, $w \in \mathbb{C}$, oder $a_k(f)$ ist konstant in F . Dann aber folgt nach Definition von H , daß $H = F = \text{Max } F$ ist, und unsere Aussage folgt, da F mindestens zwei Funktionen enthält und somit ein nicht-konstantes Funktional existiert.

(d) Zunächst gibt es wegen (a) ein maximales Element f , das in $\overline{\text{Eco}} F$ liegt. Mit Satz 4(a) folgt dann, daß alle maximalen Elemente in $\overline{\text{Eco}} F$ liegen.

□

Beispiele für die Anwendung von Satz 5(d).

(a) In $F := \text{Sub } \{f\}$ ist $\text{Max } F = [f]$.

Dies ist nur eine Äquivalenzklasse und somit gilt

$$\text{Max } F \subset \overline{\text{Eco}} F.$$

Dies wurde, wie oben erwähnt, von HM [18] mit anderen Methoden bewiesen.

(b) Spezialfall von (a). Sei $x \in \dot{X} := X \setminus \{-1\}$, $\alpha > 0$,

$h_x(z) := \frac{1+xz}{1-z}$, sowie $P_x^\alpha := \text{Sub } \{h_x^\alpha\}$ die Menge der Funktionen, die in einen vorgegebenen Sektor abbilden.

Es ist

$$\text{Max } P_x^\alpha = E_x^\alpha := [h_x^\alpha],$$

und wir haben

$$\text{Max } P_x^\alpha \subset \overline{\text{Eco}} P_x^\alpha.$$

Diese Mengen werden in Kapitel IV untersucht.

(c) Wir betrachten $S_0(R) = \{f \in S_0 \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.

Es ist wegen der Symmetrie der Bildgebiete bezüglich der reellen Achse, die bei Funktionen mit reellen Koeffizienten vorliegt,

$$\text{Max } S_0(R) = \left\{ \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2, \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2 \right\}, \text{ und wir haben}$$

$$\text{Max } S_0(R) \subset \overline{\text{Eco}} S_0(R).$$

Aber natürlich ist es unmöglich, daß die beiden Funktionen $S_0(R)$ bereits konvex aufspannen.

Andererseits gibt uns Satz 4 ($S_0(R)$ ist stark) einen Hinweis, wo wir weitere Extrempunkte suchen müssen. Sie müssen groß bezüglich $<$ sein. Daher kommen in $S_0(R)$ zunächst solche Funktionen, die nur reelle Werte auslassen, in Betracht.

$S_0(R)$ wird in Kapitel VI untersucht.

III. Extremalprobleme in Familien mit einfacher Maximalstruktur

BCK-Funktionen und einfache Familien

Nun wenden wir uns der Fragestellung zu, in welchen Fällen nur die maximalen Elemente extrem sein können.

Dazu folgende Bezeichnungen.

Definition.

$f \in A$ heißt BCK-Funktion oder $f \in \text{BCK} \Leftrightarrow (\overline{\text{Eco}} \text{ Sub } \{f\} = [f])$.

Bemerkung 1.

Die Bezeichnung folgt der in der Arbeit von BW [10], S. 228, benutzten und wurde wegen eines wesentlichen Satzes von BCK [4] gewählt.

Bemerkung 2.

Eine äquivalente Beschreibung einer BCK-Funktion ist

$$(1) \quad f \in \text{BCK} \Leftrightarrow \forall g < f \exists \mu \in \text{PM}(X) \left\{ g(z) = \int_X f(xz) d\mu \right\}$$

wegen des Choquetschen Satzes (Ch 3 im Anhang). Jede konstante Funktion liegt nach Definition in BCK.

Wir definieren nun eine wichtige Eigenschaft bestimmter Familien, die weitreichende Konsequenzen hat. Die von uns in späteren Kapiteln untersuchten Familien haben diese Eigenschaft.

Definition.

$F \subset A$ heißt *einfach* $\Leftrightarrow F$ ist drehungsinvariant, und es gilt $\text{Max } F \subset \text{BCK}$.

Extrem- und Stützpunkte in einfachen Familien

Satz 1.

Ist F kompakt und einfach, so gilt $\overline{\text{Eco}} F \subset \text{Max } F$ und $\overline{\text{co}} F = \overline{\text{co}} \text{Max } F$.

Beweis.

Wir schreiben $\text{Max } F = \bigcup_{t \in T} [f_t]$ mit geeigneter Indexmenge T . Dies ist wegen der Drehungsinvarianz und Lemma II 3(b) möglich.

Nach Voraussetzung ist

$$(2) \quad f_t \in \text{BCK} \quad \text{für alle } t \in T.$$

Wegen Lemma II 1 können wir F folgendermaßen zerlegen:

$$(3) \quad F = \bigcup_{t \in T} F_t \quad \text{mit} \quad F_t := F \cap \text{Sub} \{f_t\},$$

und wir erhalten zunächst mit Hilfe von (2) wegen $F_t \subset \text{Sub}\{f_t\}$ und KM 1

$$\overline{\text{co}} F_t \subset \overline{\text{co}} [f_t] \quad \text{für alle } t \in T.$$

Da F_t mit F drehungsinvariant ist, liegen alle Funktionen aus $[f_t]$ in F_t , und somit folgt

$$(4) \quad \overline{\text{co}} F_t = \overline{\text{co}} [f_t]$$

und damit unter erneuter Benutzung der Drehungsinvarianz

$$(5) \quad \overline{\text{Eco}} F_t = [f_t].$$

Wegen der Darstellung von F nach (3) erhalten wir aus allgemeinen Überlegungen in lokal-konvexen Räumen (A7(b))

$$\overline{\text{Eco}} F \subset \bigcup_{t \in T} [f_t] = \text{Max } F.$$

Also ist $\overline{\text{co}} F = \overline{\text{co}} (\overline{\text{Eco}} F) \subset \overline{\text{co}} \text{Max } F \subset \overline{\text{co}} F$. □

Bemerkung.

Wegen A7 (a) gilt die erste Aussage für EF statt $\overline{ECO} F$, falls $EF_t = \overline{ECO} F_t$, was in vielen Fällen gilt, z.B. wenn F_t konvex ist.

Wir sind an einer entsprechenden Aussage für die Stützpunkte interessiert. Da wir F gemäß (3) zerlegen können, genügt nach A7 (c) wiederum zunächst eine Betrachtung der Familien F_t .

Mit einer Technik, die BMW [9] bei speziellen Familien zum ersten Mal benutzten, können für die Familien F_t die Stützpunkte charakterisiert werden.

Zunächst ein Hilfssatz.

Lemma 2.

Sei f analytisch in $\bar{D}$. Liegt $f(y)$ für unendlich viele $y \in Y$ auf einer Geraden, so ist f konstant.

Für den einfachen Beweis sei auf BMW [9], Theorem 16, verwiesen.

Mit $co F$ bezeichnen wir die konvexe Hülle von F .

Satz 3.

Sei f eine in $\bar{D} \times D$ analytische Funktion und sei

$$\overline{ECO} F \subset \{f_y \mid f_y(z) = f(y, z), y \in Y\}.$$

Sei weiter $L \in A'$ nicht konstant in F für kompaktes $F \subset A$.

Dann gibt es nur endlich viele Punkte in $\overline{ECO} F$, die Stützpunkte bzgl. L sind, und jeder Stützpunkt ist eine endliche konvexe Kombination von Extrempunkten der abgeschlossenen konvexen Hülle:

$$Spt F \subset co(\overline{ECO} F).$$

Beweis (nach BMW [9], Theorem 8, und GHS [17]).

Sei $L \in A'$ nicht konstant in F .

Für einen Stützpunkt $g \in F$ bezüglich L gilt

$$(6) \quad M := \operatorname{Re} Lg = \max_{h \in F} \operatorname{Re} Lh.$$

Wegen der Vorgabe über die Extrempunkte und wegen der Kompaktheit von F hat g die Choquet-Darstellung

$$(7) \quad g(z) = \int_Y f_Y(z) \, d\mu$$

mit Träger in $\{y \in Y \mid f_Y \in \overline{\text{Eco}} F\}$.

Hieraus folgt, daß μ -fast überall auf Y gilt

$$(8) \quad \text{Re } L f_Y = M.$$

Sei H die Teilmenge von Y , in der (8) gilt.

Die Funktion ℓ , die durch

$$\ell(y) := L f_Y$$

definiert wird, ist wegen der Darstellbarkeit von L mittels eines Maßes mit kompaktem Träger in $\bar{D}$ (siehe Schober [40], S. 36) analytisch in $\bar{D}$ als Funktion von y .

Nehmen wir nun an, H habe unendlich viele Elemente. Dann folgt wegen (8) zusammen mit Lemma 2 die Konstanz von ℓ im Widerspruch zur Nicht-Konstanz von L in F .

Also ist H endlich, und (7) wird zu

$$g = \sum_{k=1}^n \mu_k f_{y_k}, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k = 1, \quad \mu_k \in [0,1], \quad f_{y_k} \in \overline{\text{Eco}} F,$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung.

Der Satz läßt sich noch dahingehend verallgemeinern, daß Analytizität nicht in ganz $\bar{D}$, sondern nur auf Y vorliegt (siehe z.B. [19], Theorem 9).

Wir erhalten den Satz über die Stützpunkte in einfachen Familien.

Satz 4.

Ist $F \subset N_0$ kompakt und einfach, ist $\text{Max } F = \bigcup_{t \in T} [f_t]$

und gibt es in jeder der Mengen $F_t = F \cap \text{Sub } \{f_t\}$ eine Funktion mit lauter nicht-verschwindenden Koeffizienten, so gilt:

$$(9) \quad \text{Spt } F \subset \bigcup_{t \in T} \text{co } [f_t] ,$$

also insbesondere

$$\text{Spt } F \subset \text{co}(\text{Max } F) .$$

Ist ferner für alle $t \in T$

$$(\text{co } [f_t] \setminus [f_t]) \cap F_t = \emptyset ,$$

so folgt:

$$\text{Spt } F \subset \text{Max } F .$$

Beweis.

Zunächst zeigen wir, daß in jeder der Familien F_t nur die Funktionale der Gestalt $L(f) = b_0 a_0(f) = b_0$ konstant sind und somit A7(c) angewendet werden kann.

Sei L ein durch seine Toeplitz-Darstellung (siehe Schober [40], S. 36)

$$L(g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k(g) , \quad \overline{\lim} |b_k|^{\frac{1}{k}} < 1$$

gegebenes, in F_t konstantes Funktional.

Habe $f \in F_t$ nur nicht-verschwindende Koeffizienten. Wegen der Drehungsinvarianz ist mit f auch f_x in F_t , wobei $x \in X$ und $f_x(z) = f(xz)$ ist.

Es ergibt sich nach Voraussetzung

$$Lf_x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k(f) x^k = \text{const.},$$

und für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $b_k \cdot a_k(f) = 0$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ $a_k(f) \neq 0$ ist, haben wir $L(f) = b_0 a_0(f)$.

Nach Voraussetzung gilt (2), also auch (5), d.h. für alle $t \in T$ gilt

$$\overline{\text{co}} F_t = [f_t] = \{g \mid g(z) = f_t(yz), y \in Y\}.$$

Nun läßt sich Satz 3 anwenden, und wir erhalten für alle $t \in T$

$$(10) \quad \text{Spt } F_t \subset \text{co } [f_t].$$

Zusammen mit A7(c) erhalten wir also bereits das Ergebnis (9), da alle Funktionale, die in F nicht konstant sind, auch in F_t nicht konstant sind.

Weiter folgt:

$$\text{Spt } F \subset \text{co } (\text{Max } F).$$

Liegen nun echte konvexe Kombinationen aus $[f_t]$ gar nicht in F_t , so folgt für alle $t \in T$

$$\text{Spt } F_t \subset [f_t]$$

und mit derselben Argumentation wie oben schließlich

$$\text{Spt } F \subset \text{Max } F.$$

□

Konstruktion von BCK-Funktionen

Der Satz von Herglotz zeigt, daß die durch

$$h_1(z) := \frac{1+z}{1-z}$$

erklärte Funktion h_1 in BCK liegt.

Leicht zu verifizieren ist

Lemma 5.

$$(f \in \text{BCK}, a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}) \Rightarrow (af+ b \in \text{BCK}).$$

Somit sind alle Halbebenenabbildungen h_x mit der Darstellung

$$(13) \quad h_x(z) = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z} + \frac{1-x}{2} = \frac{1+xz}{1-z}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$

BCK-Funktionen.

Allerdings sind nur diejenigen Halbebenen für uns interessant, die den Ursprung nicht enthalten, d.h. nur diejenigen h_x mit $x \in \bar{\mathbb{D}} \setminus \{-1\}$.

Für Familien $F \subset N_0$ nicht-verschwindender Funktionen definieren wir

$$F^\alpha := \{f^\alpha \mid f \in F\} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Ausgehend von (13) erhält man für $P_x^\alpha = \text{Sub } \{h_x^\alpha\}$

Satz 6 (BCK [4], siehe auch Schober [40], S. 16).

Für $\alpha > 1$ und $x \in \bar{\mathbb{D}} \setminus \{-1\}$ gilt:

$$(a) \quad EP_x^\alpha = \overline{ECO} P_x^\alpha = E_x^\alpha, \quad \text{also insbesondere}$$

$$(b) \quad h_x^\alpha \in \text{BCK}.$$

Der Vollständigkeit halber, und da wir weitere Schlüsse aus dem Beweis ziehen wollen, nehmen wir ihn auf.

Beweis.

Ist f nicht extrem in P_x , so gibt es eine konvexe Darstellung

$$f = t f_1 + (1-t)f_2 \quad \text{mit } f_k \in P_x.$$

Diese wird zu einer konvexen Darstellung von f^α in P_x^α durch Multiplikation mit $f^{\alpha-1}$, falls

$$f_k \cdot f^{\alpha-1} \in P_x^\alpha \quad \text{für beliebige } f_k, f \in P_x.$$

Dies folgt für $\alpha > 1$ aber aus der Konvexität von $\log h_x$.

Wegen $h_x \in \text{BCK}$ gilt:

$$\text{EP}_x = \overline{\text{ECO}} \text{P}_x = \text{E}_x^1,$$

also folgt:

$$\overline{\text{ECO}} \text{P}_x^\alpha \subset \text{EP}_x^\alpha \subset \{f^\alpha \mid f \in \text{EP}_x\} = \text{E}_x^\alpha.$$

Daß wirklich alle Funktionen aus E_x^α extrem in $\overline{\text{CO}} \text{P}_x^\alpha$ sind, folgt leicht aus der Drehungsinvarianz (oder natürlich aus Satz II 5, dortiges Beispiel (b)). $\square$

Bemerkung.

Der Beweis gelingt offenbar nur, weil (wegen der Konvexität von h_x) $\text{EP}_x = \overline{\text{ECO}} \text{P}_x$ ist.

Dafür bekommt man aber auch die Information $\text{EP}_x^\alpha = \overline{\text{ECO}} \text{P}_x^\alpha$ mitgeliefert. Man vergleiche die Bemerkung nach Satz 1.

Durch Übertragung des Beweises erhält man eine leichte Verallgemeinerung dieses Satzes, die zur Konstruktion weiterer BCK-Funktionen nützlich ist.

Korollar 7.

Ist $f \in \text{BCK} \cap N_0$, $\log f$ konvex, $\alpha > 1$ und

$\text{E Sub } \{f\} = \overline{\text{ECO}} \text{ Sub } \{f\}$, dann folgt:

$\text{E Sub } \{f^\alpha\} = \overline{\text{ECO}} \text{ Sub } \{f^\alpha\} = [f^\alpha]$, also insbesondere: $f^\alpha \in \text{BCK}$.

Da die Halbebenenabbildungen die einzigen konvexen BCK-Funktionen sind (siehe HM [18], Milcetic [30], AM [11]), sind die Familien P_x beziehungsweise die Funktionen h_x ein natürlicher Ausgangspunkt zur Konstruktion von BCK-Funktionen.

Es zeigt sich ferner, daß BCK abgeschlossen ist.

Lemma 8 (siehe Clunie [12], S. 143).

Ist $\lim f_k = f$, so gilt:

$$(f_k \in \text{BCK für alle } k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (f \in \text{BCK}).$$

Beweis.

Sei $g < f$, also $g = f \circ \omega$, $\omega \in B$. Definieren wir $g_k := f_k \circ \omega$, so gilt offenbar $g_k < f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit haben wir die Darstellungen

$$g_k(z) = \int_X f_k(xz) d\mu_k$$

und folglich (nach Auswahl einer Teilfolge)

$$g(z) = \lim \int_X f_k(xz) d\mu_k = \int_X \lim f_k(xz) \lim d\mu_k = \int_X f(xz) d\mu,$$

weil der Grenzprozeß lokal-gleichmäßig ist und wegen der schwachen Kompaktheit von $\text{PM}(X)$ mit

$$\mu := \lim \mu_k \in \text{PM}(X).$$

□

Beispiele von BCK-Funktionen:

Wählt man die Folge

$$(h_{a/n-1}^n)_{n \geq n_0} = \left(\left(1 + \frac{az}{1-z} \cdot \frac{1}{n} \right)^n \right) \quad \text{mit } \text{Re } a > 0,$$

so erhalten wir

$$\exp \left(\frac{az}{1-z} \right) \in \text{BCK}.$$

(siehe auch Clunie [12], S. 143).

Bildet man Funktionen der Form $wh_x^2 + (1-w)$, $w \in \mathbb{C}$, $x \in \bar{D} \setminus \{-1\}$, so bekommt man mit Lemma 5

$$\frac{1+az}{(1-z)^2} \in \text{BCK} \quad \text{für } \text{Re } a \geq -1 \quad \text{und}$$

$$\frac{1+xz^2}{(1-z)^2} \in \text{BCK} \quad \text{für} \quad x \in \bar{\mathbb{D}}$$

(siehe auch BW [10], Lemma 2).

Es wäre sehr interessant, insbesondere die Schlitzabbildungen auf die BCK-Eigenschaft hin zu untersuchen. Die bislang bekannten BCK-Funktionen sind sicherlich nicht die einzigen Funktionen mit dieser Eigenschaft.

IV. Betrachtung spezieller einfacher Familien

Die Familien $P_{\circ}^{\alpha}$

Die bereits betrachteten Familien P_x^{α} lassen sich für $\alpha \leq 2$ geometrisch als die Mengen aller in einen vorgegebenen Sektor mit Ecke im Ursprung abbildenden $N_{\circ}$ -Funktionen deuten.

Es liegt nun nahe, von der expliziten Vorgabe des Gebietes abzu-
sehen und alle Familien mit gleichem Winkel $\alpha\pi$ zusammenzufassen.

Wir betrachten also die Familien

$$(1) \quad P_{\circ}^{\alpha} := \bigcup_{x \in X} P_x^{\alpha}.$$

Diese Definition ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sinnvoll, aber nur für $\alpha \geq 1$ erweist sich $P_{\circ}^{\alpha}$ als einfache Familie aufgrund von Satz III 6.

Für $\alpha \geq 1$ folgt nun:

$$(2) \quad \overline{E_{\circ} P_{\circ}^{\alpha}} \stackrel{KM2}{\subset} \overline{E P_{\circ}^{\alpha}} \stackrel{A7(a)}{\subset} \bigcup_{x \in X} \overline{E P_x^{\alpha}} \stackrel{III 6}{=} \bigcup_{x \in X} \overline{E_x^{\alpha}} =: E^{\alpha}$$

und weiter mit dem Satz von Krein-Mil'man

$$(3) \quad \overline{CO} P_{\circ}^{\alpha} = \overline{CO} E^{\alpha}.$$

Aus BMW [9], Theorem 1, folgt:

$$\overline{CO} E^{\alpha} = \left\{ f \mid f(z) = \int_{X \times Y} h_x^{\alpha}(yz) \, d\mu, \mu \in PM(X \times Y) \right\}.$$

Welche Funktionen aus E^{α} wirklich extreme Punkte von $\overline{CO} E^{\alpha}$ sind, ob z.B. in (2) Gleichheit gilt - was man vermuten würde - ist zunächst nicht klar. Für konkrete Extremalprobleme reicht zwar sicher in den meisten Fällen die vorliegende Teilmengenbeziehung aus, aber für $\alpha = 1$ gelingt es uns auch - nach einer Methode, die in BMW [9] zur genauen Bestimmung von $\overline{E_{\circ} C}$ benutzt wird - eine positive Antwort zu finden.

Satz 1.

$$\overline{ECO} E^1 = E^1 .$$

Beweis.

In BMW [9], Theorem 6, wurde dargelegt, daß es genügt

$$(4) \quad \frac{1-x_0 z}{1-y_0 z} = \int_{X \times Y} \frac{1-xz}{1-yz} d\mu \Rightarrow \mu = \delta_{x_0 y_0}$$

zu zeigen. Dazu formen wir die linke Gleichung in (4) um und erhalten

$$(5) \quad 1-x_0 z - \int_{X \times \{y_0\}} (1-xz) d\mu = (1-y_0 z) \int_{X \times Y \setminus \{y_0\}} \frac{1-xz}{1-yz} d\mu .$$

In [9] wurde nun gezeigt, daß für $z \rightarrow \bar{y}_0$ der Ausdruck

$$(1-y_0 z)^3 \int_{X \times Y \setminus \{y_0\}} \frac{1-xz}{(1-yz)^3} d\mu$$

gegen 0 strebt. Ein analoges Beweisschema zeigt, daß dies auch für die rechte Seite von (5) gilt.

Wir erhalten also

$$(6) \quad 1-x_0 \bar{y}_0 - \int_{X \times \{y_0\}} (1-x\bar{y}_0) d\mu = 0 ,$$

woraus in [9] $\mu = \delta_{x_0 y_0}$ abgeleitet wird. □

Bemerkung.

Eine Verallgemeinerung des dargestellten Beweises für beliebiges α scheitert an der Nichtlinearität des dann in (6) auftretenden Integranden.

In Satz III 4 wurde ein Ergebnis für die Stützpunkte in einfachen Familien hergeleitet. Hallenbeck und MacGregor [19], Theorem 8, gelang es kürzlich zu zeigen, daß endliche konvexe Kombinationen von Extrempunkten von P_x^α für $\alpha > 1$ nicht in P_x^α liegen. Dies ergibt zusammen mit Satz III 4 (siehe Bem. 2, S. 28)

$$(7) \quad \text{Spt } P_O^\alpha \subset E^\alpha \quad \text{für } \alpha > 1 .$$

Anders liegt der Fall für $\alpha = 1$. Hier liegt jede konvexe Kombination aufgrund der Konvexität des maximalen Bildgebiets in P_O^1 , und es gilt somit

$$(8) \quad \text{Spt } P_O^1 \subset \bigcup_{x \in \dot{X}} \text{co } E_x^1 .$$

Für alle $\alpha \in [1, 2]$, also auch für $\alpha = 1$, werden wir mit geometrischen Überlegungen zeigen, daß die vorliegenden endlichen konvexen Kombinationen jedoch nicht in S_O liegen.

Lemma 2.

Sei $f \in \text{co } E_x^\alpha \setminus E_x^\alpha$ für ein $x \in \dot{X}$ und $\alpha \in]0, 2[$.

Dann gilt

$$f \notin S^* .$$

Beweis.

Habe f eine endliche konvexe Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{k=1}^n t_k \left(\frac{1 + x y_k z}{1 - y_k z} \right)^\alpha$$

für ein $n \geq 2$ und

$$\sum_{k=1}^n t_k = 1, \quad t_k \in]0, 1[, \quad y_k \neq y_l \quad \text{für } k \neq l .$$

Wir betrachten in $\mathbb{D}$ liegende paarweise disjunkte Halbumgebungen U_k von $\bar{y}_k$. Da jede der f darstellenden Funktionen denselben Sektor als Bildgebiet hat, und da f in $\bar{y}_k$ jeweils eine Singu-

larität besitzt, gibt es ein $R > 0$, sodaß der außerhalb $\mathbb{D}_R$ liegende Teil des Sektors für alle k , $1 \leq k \leq n$, in $f(U_k)$ liegt. Also ist f nicht schlicht.

Im Fall $\alpha = 1$ gilt genauer: Jede der f darstellenden Funktionen bildet als Möbiustransformation $\mathbb{D}$ auf dieselbe Halbebene H ab, $\partial\mathbb{D}$ auf ∂H und $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{H}$. Da H , $\partial H \setminus \{\infty\}$ und auch $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{H}$ konvexe Mengen sind, bildet f auch $\mathbb{D}$ in H , $\partial\mathbb{D}$ in ∂H und $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ in $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{H}$ ab. Als rationale Funktion vom Grad n muß schließlich f eine Abbildung sein, die jeden Wert in H genau n -mal annimmt. $\square$

Definieren wir für $\alpha \in]0, 2]$

$$S_x^\alpha := P_x^\alpha \cap S_0 \quad \text{und} \quad S^\alpha := P_0^\alpha \cap S_0,$$

so erhalten wir zusammengefaßt

Satz 3.

Sei $\alpha \geq 1$. Dann gilt

- (a) $\max P_0^\alpha = E^\alpha$
- (b) $\overline{CO} P_0^\alpha = \overline{CO} E^\alpha (= \overline{CO} S^\alpha \text{ falls } \alpha \leq 2)$
- (c) $\overline{ECO} P_0^\alpha \subset E^\alpha$, $\overline{ECO} P_0^1 = E^1$
- (d) $\text{Spt } P_0^\alpha \subset E^\alpha$ falls $\alpha > 1$,

$$\text{Spt } P_0^1 \subset \bigcup_{x \in \hat{X}} \overline{CO} E_x^1, \text{ sowie}$$

$$\text{Spt } S^1 \subset E^1.$$

Bemerkung 1.

Es ist denkbar, daß - trotz der wesentlich komplizierteren Extrempunktstruktur der Mengen P_x^α - für $\alpha < 1$ in P_0^α entsprechende Ergebnisse gelten. Allerdings müßte ein Beweis dafür völlig anders geführt werden.

Bemerkung 2.

Bei der Anwendung von Satz III 4 benutzen wir, daß für $\alpha \geq 1$ mit h_x eine Funktion mit lauter nicht-verschwindenden Koeffizienten in P_x^α liegt.

Folgerungen aus der Subordination

Wir untersuchen nun Extremalprobleme, die wir ohne Kenntnis der Extrempunkte, nur die Subordination nutzend, lösen können. Insbesondere können hier auch Ergebnisse für $\alpha < 1$ hergeleitet werden.

Wir geben drei Extremalprobleme an, die in einer kompakten Familie nur von maximalen Elementen gelöst werden.

Lemma 4.

Sei $F \subset N_0$ kompakt, und sei $r \in]0,1[$. Dann werden die Extremalprobleme

- (i) $\max_{g \in F} \max_{\theta \in \mathbb{R}} |g(re^{i\theta})|$,
- (ii) $\max_{g \in F} \max_{\theta \in \mathbb{R}} (\pm \arg g(re^{i\theta}))$ (sei immer $\arg 1 := 0$),
- (iii) $\max_{g \in F} \max_{z_1 \in \bar{D}_r} \max_{z_2 \in \bar{D}_r} (\arg g(z_2) - \arg g(z_1))$

nur von maximalen Elementen gelöst.

Beweis.

- (i) Nehme f das Maximum an, das wegen des Maximumprinzips für analytische Funktionen in ganz $\bar{D}_r$ gilt. $f < g$ impliziert $g(z) = f(xz)$, $x \in X$ wegen der Eindeutigkeitsaussage des Schwarzschen Lemmas, also ist f maximales Element.
- (ii) Da für $f, g \in N_0$ die Aussagen $f < g$ und $\log f < \log g$ äquivalent sind, bekommen wir das Resultat unter Anwendung des Maximumprinzips für harmonische Funktionen.
- (iii) folgt aus (ii).

Bemerkung.

Extremalprobleme werden in dieser Arbeit im wesentlichen konstruktiv gelöst (durch Untersuchung der maximalen Elemente), alle Resultate sind scharf und die Lösungsfunktionen der jeweiligen Konstruktion zu entnehmen. Daher wird die Schärfe in der Formulierung der Sätze nicht explizit erwähnt, und die Lösungsfunktionen werden nicht explizit angegeben.

Wir untersuchen nun die Mengen E_x^α und E^α auf die Extremalprobleme von Lemma 4 hin und gelangen dadurch zu Aussagen für P_x^α bzw. P_O^α , zum Teil sogar für $\overline{\text{co}} P_x^\alpha$ bzw. $\overline{\text{co}} P_O^\alpha = \overline{\text{co}} E^\alpha$.

Satz 5.

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$(a) \quad f \in \overline{\text{co}} E^\alpha \Rightarrow$$

$$|f(re^{i\theta})| \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha.$$

$$(b) \quad f \in P_O^\alpha \Rightarrow$$

$$(9) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arcsin r.$$

Beweis.

$$(a) \quad \text{In } \overline{\text{co}} E^\alpha \text{ gilt nach Lemma 4(a): } |f(re^{i\theta})| \leq \max_{\theta, \varphi} \left(\frac{1+re^{i(\theta+\varphi)}}{1-re^{i\theta}} \right)^\alpha = \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\alpha.$$

$$(b) \quad \text{In } P_O^\alpha \text{ gilt nach Lemma 4(b):}$$

$$|\arg f(re^{i\theta})| \leq \alpha \left(\max_{\theta, \varphi} \arg(1+re^{i(\theta+\varphi)}) - \min_{\theta} \arg(1-re^{i\theta}) \right) = 2\alpha \arcsin r. \quad \square$$

Wir betrachten nun Argument-Probleme in den Familien P_x^α . Wegen der Asymmetrie sind diese Probleme mit größerem Rechenaufwand verbunden.

Sei im Folgenden $\varphi := \arg x \in]-\pi, \pi[$.

Satz 6.

Für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $f \in P_x^\alpha$ gilt

$$2\alpha \arg(1 - ire^{i\frac{\varphi}{2}}) \leq \arg f(re^{i\theta}) \leq 2\alpha \arg(1 + ire^{i\frac{\varphi}{2}}) .$$

Insbesondere:

$$f \in P_1^\alpha \Rightarrow |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arctan r .$$

Beweis.

Wegen Lemma 4 genügt es, E_x^α zu untersuchen.
Gesucht sind

$$\max_{\theta} \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right)^\alpha = \max_{\theta} \alpha \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right) .$$

Sei

$$G(\theta) := \operatorname{Im} \log \frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} .$$

Wir erhalten

$$G'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta+\varphi) + \cos \theta = 0 .$$

Sei zunächst $\varphi \neq 0$. Dann ist dies weiter äquivalent zu

$$\theta + \varphi = -\theta + \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} .$$

Man sieht nun leicht, daß für

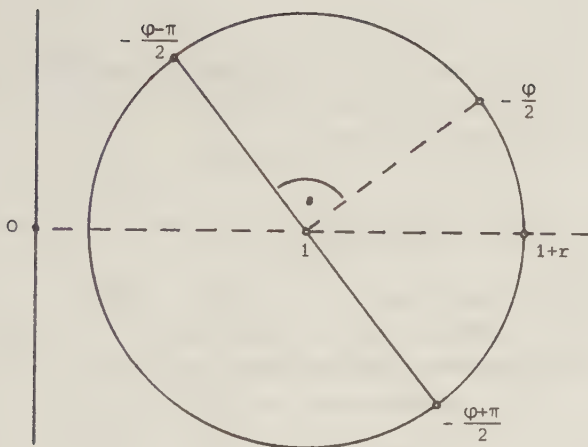
$\theta = -\frac{\varphi-\pi}{2}$ ein Maximum und für $\theta = -\frac{\varphi+\pi}{2}$ ein Minimum vorliegt,
und es folgt:

$$\max_{\theta} \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right) = 2 \arg(1 + ire^{i\frac{\varphi}{2}}) \quad \text{und}$$

$$\min_{\theta} \arg \left(\frac{1 + re^{i(\theta+\varphi)}}{1 - re^{i\theta}} \right) = 2 \arg(1 - ire^{i\frac{\varphi}{2}}) .$$

Der ausgelassene Fall $\varphi = 0$ wird von der Formel ebenfalls abgedeckt.

□



Bemerkung 1.

Wegen $|\frac{\varphi}{2}| < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\arg(1 \pm ire^{\frac{i\varphi}{2}}) = \arctan \frac{\pm r \cos \frac{\varphi}{2}}{1 \pm r \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Bemerkung 2.

Die θ -Werte, die zum Maximum und Minimum führen, hängen nicht von r ab und stimmen mit den negativen Argumentwerten überein, die den Rand der Bildhalbebene von h_x^1 definieren, denn für $z \in \partial D \setminus \{1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} (10) \quad \arg \frac{1+xz}{1-z} &= \arg(1+xz) - \arg(1-z) = \frac{\arg xz}{2} - \frac{\arg(-z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\arg x \pm \pi) = \frac{\varphi \pm \pi}{2}. \end{aligned}$$

Wir werfen nun die Frage auf, inwiefern diese Abschätzungen noch auf die konvexen Hüllen übertragbar sind.

Dabei erhalten wir u.a. ein Resultat, das uns zeigt, daß im allg. die Elemente der konvexen Hüllen nicht in N_0 liegen, sondern Nullstellen haben.

(Ähnliche Fragestellungen untersuchte Campbell [11]. Er betrachtete allerdings N -Familien. Dort sind ähnliche Betrachtungen für die Ableitung möglich.)

Satz 7.

Sei $F \subset N_0$ und gelte für alle $f \in F$ die scharfe Aussage

$$(11) \quad -A(r) \leq \arg f(re^{i\theta}) \leq B(r).$$

Sei ferner

$$R := \min \{r | A(r) + B(r) = \pi\} \cup \{1\}$$

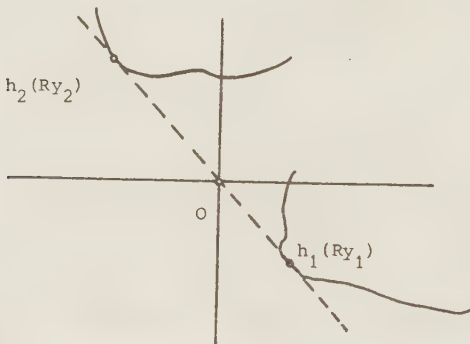
der *Halbebenen-Radius*. Dann folgt:

(a) Für alle $f \in \overline{CO} F$ und alle $r < R$ gilt (11).

(b) Ist ferner F drehungsinvariant, so gibt es ein $f \in \overline{CO} F$ mit $f(R) = 0$. Insbesondere ist $\overline{CO} F \not\subset N_0$.

Beweis.

(a) folgt sofort aus der Konvexität des für alle $r < R$ und $f \in F$ geltenden Sektors. Für $r > R$ liegt ein Sektor vor, der größer als eine Halbebene (und somit nicht mehr konvex) ist.



Für (b) benutzen wir, daß es nach Voraussetzung Funktionen $h_k \in F$ sowie $y_k \in Y$ gibt ($k \in \{1, 2\}$), sodaß

$$\arg h_1(Ry_1) - \arg h_2(Ry_2) = \pi,$$

also

$$h_2(Ry_2) = -\lambda h_1(Ry_1)$$

mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Definieren wir die Funktionen g_k durch

$$g_k(z) = h_k(Y_k z) ,$$

so folgt $g_k \in F$ aus der Drehungsinvarianz von F , und

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} g_1 + \frac{1}{\lambda+1} g_2$$

ist eine im Punkt R verschwindende konvexe Kombination. $\square$

Wir untersuchen nun wieder konkret die Familien P_x^α .

Satz 8.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gelten:

(a) Für alle $f \in P_x^\alpha$, r_1 und $r_2 \leq r$ gilt:

$$(12) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 2\alpha \arctan \frac{2r \cos \frac{\varphi}{2}}{1-r^2} .$$

(b) Der Halbebenen-Radius R_x^α von P_x^α hat den Ausdruck

$$(13) \quad R_x^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{R} (\sqrt{R^2 + \cos^2 \frac{\varphi}{2}} - \cos \frac{\varphi}{2}) & \text{für } \alpha > 1 \\ 1 & \text{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

mit $R := \tan \frac{\pi}{2\alpha}$.

(c) Für alle $f \in \overline{CO} P_x^\alpha$ und alle $r < R_x^\alpha$, r_1 und $r_2 \leq r$ gilt:

$$2\alpha \arg(1 - ire^{i\frac{\varphi}{2}}) \leq \arg f(re^{i\theta}) \leq 2\alpha \arg(1 + ire^{i\frac{\varphi}{2}}) .$$

(d) Für $\alpha > 1$ gibt es eine Funktion in $\overline{CO} P_x^\alpha$, die an der Stelle R_x^α verschwindet. Somit ist $\overline{CO} P_x^\alpha \not\subset N_0$.

Beweis.

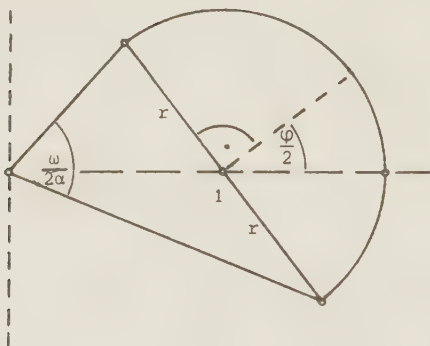
(a) Es ist wegen Lemma 4 wieder ausreichend, das Problem in E_x^α zu lösen. Mit Satz 6 erhalten wir

$$|\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq \omega(r) := \max_{z \in \bar{D}_r} \arg \left(\frac{1+xz}{1-z} \right)^\alpha$$

$$- \min_{z \in \bar{D}_r} \arg \left(\frac{1+xz}{1-z} \right)^\alpha = 2\alpha \arg \frac{1+z}{1-z} \Big|_{z=re^{i(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2})}}$$

$$= B(r) + A(r)$$

(zur Definition von A und B vgl. Satz 7).



Wegen der Beziehung $\arg \frac{1+z}{1-z} = \arg(1+z)(1-\bar{z})$ folgt:

$$\omega(r) = 2\alpha \arctan \frac{2r \cos \frac{\pi}{6}}{1-r^2}.$$

(b) Sei zunächst $\alpha \leq 1$. Dann liegt das Bild von ganz D in einer Halbebene und es folgt $R_x^\alpha = 1$.

Für $\alpha > 1$ haben wir nach Satz 7 die Gleichung

$$A(R_x^\alpha) + B(R_x^\alpha) = \omega(R_x^\alpha) = \pi$$

zu lösen. Also gilt

$$2\alpha \arctan \frac{2R_x^\alpha \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - (R_x^\alpha)^2} = \pi \Leftrightarrow R \cdot (R_x^\alpha)^2 + 2R_x^\alpha \cos \frac{\varphi}{2} - R = 0.$$

Damit folgt die angegebene Lösung.

(c) und (d) sind nun direkte Folgerungen aus Satz 7. $\square$

Bemerkung.

$$(i) \quad \varphi = 0 \Rightarrow R_1^\alpha = \tan \frac{\pi}{4\alpha},$$

$$(ii) \quad \varphi \rightarrow \pi \Rightarrow R_x^\alpha \rightarrow 1.$$

Für P_O^α folgt analog:

Satz 9.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gelten:

(a) Für alle $f \in P_O^\alpha$, r_1 und $r_2 \leq r$ gilt:

$$(14) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4\alpha \arctan r.$$

(b) Der Halbebenen-Radius R_O^α von P_O^α hat den Ausdruck

$$(15) \quad R_O^\alpha = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{4\alpha} & \text{für } \alpha > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

(c) Für alle $f \in \overline{CO} E^\alpha$ und alle $r < R_O^\alpha$ gilt:

$$|\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arcsin r.$$

(d) Für $\alpha > \frac{1}{2}$ gibt es eine Funktion in $\overline{CO} E^\alpha$, die an der Stelle R_O^α verschwindet.

Beweis.

(a) Wir bekommen das Resultat aus (12) durch Maximierung ($\varphi = 0$).

(b) folgt direkt aus Satz 5, weil (9) in beide Richtungen scharf ist, (c) und (d) wieder aus Satz 7. $\square$

Bemerkung.

Für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ bedeutet die Aussage (b), daß alle Funktionen positiven Realteil besitzen. Das letztere ist geometrisch klar.

Exponierte Punkte.

Nun wollen wir uns der Fragestellung widmen, welche der nach Satz 3 möglichen Extrempunkte von $\overline{CO} E^\alpha$ wirklich extrem sind. Wir werden zeigen, daß es unter den Funktionen in E^α , sogar auch für $\alpha < 1$, exponierte und daher auch extreme Punkte gibt.

Die Idee zur Vorgehensweise stammt von Pearce [32], der damit die Exponiertheit gewisser Funktionen in S zeigte, deren Bildgebiete einen geradlinigen Schlitz haben.

Aus Satz 9 wissen wir, daß in $\overline{CO} E^\alpha$ alle Funktionen den offenen Kreis mit Radius R_0^α in die rechte Halbebene abbilden. Dies ist eine Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Pearceschen Methode.

Hamilton [20], Theorem 1, zeigte, daß die Abschätzung (9) für $\alpha = 2$ auch in S_0 gültig ist, solange $r < 0,913\dots$, und daß nur Funktionen aus E^2 Lösung des Argumentproblems sein können, sofern $r < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Daher gelten die folgenden Resultate auch in S_0 .

Satz 10.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und

$$G^\alpha := \{f \mid f(z) = \left(\frac{1+xyz}{1-yz}\right)^\alpha, x \in X, y \in Y, |\arg x| < \frac{\pi}{2\alpha}\}.$$

Dann gelten:

(a) Geometrische Charakterisierung: Für $\alpha \leq 2$ ist

$$G^\alpha = \left\{ f \in S_0 \left| \begin{array}{l} fD \text{ ist Sektor mit Winkel } \alpha\pi, \text{ dessen Ecke im} \\ \text{Ursprung liegt und der durch Drehung des ent-} \\ \text{sprechenden symmetrischen Sektors um einen Winkel} \\ \text{von höchstens } \pi/4 \text{ entsteht.} \end{array} \right. \right\}$$

(b) $G^\alpha \subset \text{Exp } \overline{CO} E^\alpha$ und

$$G^2 \subset \text{Exp } S_O .$$

(c) $\overline{G^\alpha} \subset \overline{ECO} E^\alpha$,

$$\overline{G^\alpha} \subset \text{Spt } P_O^\alpha \text{ sowie}$$

$$\overline{G^2} \subset \overline{ECO} S_O ,$$

$$\overline{G^2} \subset \text{Spt } S_O .$$

Beweis.

(a) Diese geometrische Charakterisierung ist einfache Folge von (10) .

(b) Solange $\text{Re } f(z_O) > 0$ für alle $f \in \overline{CO} E^\alpha$ (bzw. für alle $f \in S_O$) , also solange $|z_O| < R_O^\alpha$ (bzw. $|z_O| < \sin \frac{\pi}{8}$) , findet man in analoger Weise wie bei Pearce [32] ein Funktional vom Typ

$$L(f) := w f(z_O) \text{ mit } w \in \mathbb{C} ,$$

dessen Realteil genau gleichzeitig mit entweder $\arg f(z_O)$ oder $-\arg f(z_O)$ maximiert wird.

Nun läßt sich der Beweis von [32] auf den hier vorliegenden Fall übertragen: In P_O^α kommen als Lösungen des Argumentproblems nur maximale Elemente in Frage (Drehungsinvarianz und Lemma 4) , und da in E^α genau eine Lösung existiert (siehe [32]) , ist diese eindeutig (für S_O sind nach [20] auch nur Funktionen aus E^2 mögliche Lösungen). Da andererseits jede Funktion aus G^α ein derartiges Problem löst (siehe [32]) , folgt (b) .

(c) folgt wie in [32]. □

Bemerkung.

Durch genaue Analyse der Schifferschen Differentialgleichung des zugehörigen Funktionalen kommen Duren und Schober [15], Theorem 1

und Corollary 2, ebenfalls zu dem Ergebnis für S_0 .

Das Koeffizientenproblem.

Nun lösen wir das Koeffizientenproblem und, etwas allgemeiner, das Extremalproblem für die n -te Ableitung an einer vorgegebenen Stelle z_0 .

Im Beweis zu Satz 10 wurde gezeigt, daß die Extremalprobleme $\max \operatorname{Re} w f(z_0)$ für gewisse kleine $|z_0|$ und gewisse $w \in \mathbb{C}$ von verschiedenen Extremalfunktionen gelöst werden.

Anders ist es bei dem Problem $\max \operatorname{Re} f^{(n)}(z_0)$. Hier erweisen sich immer die "Koebe-funktionen" $h^\alpha := h_1^\alpha$ als extremal, wenn $\alpha \geq 1$ ist.

Satz 11.

Sei $\alpha \geq 1$. Dann gilt für alle $f \in \overline{CO} E^\alpha$:

- (a) $|a_n(f)| \leq a_n(h^\alpha)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
 (b) $|f^{(n)}(z)| \leq (h^\alpha)^{(n)}(|z|)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{D}$.

Insbesondere für $\alpha = 1$

- (a') $|a_n(f)| \leq 2$,
 (b') $|f^{(n)}(z)| \leq 2 \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}$, $|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$,

und für $\alpha = 2$

- (a'') $|a_n(f)| \leq 4n$,
 (b'') $|f^{(n)}(z)| \leq 4 \frac{n!(n+|z|)}{(1-|z|)^{n+2}}$, $|f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$.
 (c) Für die Koeffizienten $a_n := a_n(h^\alpha)$ gilt die Rekursionsformel

$$(16) \quad \begin{cases} a_0 := 1, \\ a_1 := 2\alpha, \\ a_{n+1} := \frac{1}{n+1} ((n-1)a_{n-1} + 2\alpha a_n). \end{cases}$$

Beweis.

Aharonov und Friedland [2] zeigten zum ersten Mal, daß in E^α die KoebeFunktionen die größten Koeffizienten haben (siehe auch Schober [40], S. 17). Wegen der Drehungsinvarianz sind die Probleme $\max |a_n|$ und $\max \operatorname{Re} a_n$ äquivalent, und somit folgt (a) aus Satz 3(c). Entwickeln wir in üblicher Weise $f^{(n)}(z)$ und schätzen mithilfe der Dreiecksungleichung ab - dies geht, da alle a_n positiv sind - so bekommen wir (b) (siehe dazu Koepf [26]). (c) Die Familie E^α hat - wie man aus der geometrischen Bedeutung sieht oder leicht analytisch verifiziert - die Darstellung

$$(17) \quad E^\alpha = \left\{ f \mid f = \frac{h^\alpha \circ l}{h^\alpha \circ l(0)}, l \in \operatorname{Möb} \mathbb{D} \right\},$$

wobei $\operatorname{Möb} \mathbb{D} := \{f \in A \mid f \text{ schlichter Automorphismus}\}$.

Also läßt sich in E^α in analoger Weise wie in S die Marty-Variation (siehe Schober [40], chapter 9) durchführen, die für einen Stützpunkt bezüglich $a_n(f)$ zu der Marty-Relation

$$(18) \quad (n+1)a_{n+1} - a_1 a_n - (n-1)\overline{a_{n-1}} = 0$$

führt.

Wir wissen wegen (a), daß h^α alle Marty-Relationen erfüllen muß, und da alle $a_n \in \mathbb{R}$, folgt (c).

Die Rekursionsformel (16) läßt sich natürlich auch aus der dazu äquivalenten Differentialgleichung $f' = z^2 f'' + 2\alpha f$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = 1$, der h^α genügt, oder aus der expliziten Koeffizientenformel $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k}$ herleiten. Wir wollten allerdings an dieser Stelle den Zusammenhang zur Marty-Relation herstellen. $\square$

V. Familien von Funktionen, deren Bildgebiete geometrische Eigenschaften besitzen

Der eigentliche Ausgangspunkt zu dieser Arbeit war die Fragestellung dieses Kapitels. Betrachtet man in analoger Weise wie in N Familien konvexer, sternförmiger oder nahezu-konvexer Funktionen in N_0 , so erwartet man zwar analoge Resultate in bezug auf die Extrempunkt- oder Stützpunktmengen, muß sich aber nach einer neuen Methode umsehen, die diese Resultate liefert.

Man kann aus der - auch hier möglichen - analytischen Beschreibung wegen der fehlenden Normierung des ersten Koeffizienten nicht durch Integrationen zu Ergebnissen kommen.

Da die Normierung N_0 eine geometrische Bedeutung hat, gelingt es, mit geometrischen Betrachtungen zum Ziel zu kommen.

Konvexe Funktionen

Wir betrachten die Familie

$$K_0 := K^* \cap N_0.$$

Natürlich ist $K_0 \cup \{1\}$ eine drehungsinvariante, kompakte Teilmenge von A .

Wir benötigen folgende wohlbekannte geometrische Eigenschaft konvexer Gebiete:

Lemma 1.

Jeder Punkt des Komplements eines von $\mathbb{C}$ verschiedenen konvexen Gebiets G liegt auf dem Rand einer Halbebene, die G enthält.

Das heißt, die geometrische Charakterisierung impliziert eine Subordinationseigenschaft, genauer, es können Aussagen über die maximalen Elemente gemacht werden. Zusammen mit der Tatsache, daß in N_0 der Wert 0 ausgelassen wird, die entsprechenden Gebiete also alle den Ursprung nicht enthalten, gelangen wir zu

Satz 2.

$\text{Max } K_O = E^1$, also ist K_O einfach, und es gilt $K_O \subset S^1$.

Also lassen sich die Resultate der vorangegangenen Kapitel III und IV anwenden, und wir bekommen

Satz 3.

$$(a) \quad \overline{\text{co}} K_O = \overline{\text{co}} E^1$$

$$(b) \quad E \overline{\text{co}} K_O = E^1$$

$$(c) \quad \text{Spt } K_O \subset E^1$$

$$(d) \quad G^1 \subset \text{Exp } K_O, \quad \bar{G}^1 \subset \text{Spt } K_O$$

$$(e) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2 \arcsin r \quad \text{für alle } f \in K_O, r \in [0, 1[,$$

falls $r \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ auch für alle $f \in \overline{\text{co}} K_O$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{\text{co}} K_O$, die an der Stelle $\frac{\sqrt{2}}{2}$ verschwindet.

$$(f) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4 \arctan r \quad \text{für alle } f \in K_O$$

und alle $r_1, r_2 \leq r$.

$$(g) \quad \text{Für alle } f \in K_O, z \in \mathbb{D} \text{ gilt: } |\hat{f}(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq 2 \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}, \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Die Menge $K_O \cup \{1\}$ ist kompakt und nach Satz 2 auch einfach. Wir können nun Satz III 1 anwenden und erhalten:

$$\overline{\text{co}} K_O = \overline{\text{co}} (K_O \cup \{1\}) = \overline{\text{co}} \text{Max } K_O = \overline{\text{co}} E^1$$

sowie $E \overline{\text{co}} K_O \subset E^1$.

Damit ist (a) bewiesen und wegen Satz IV 1 gilt bei der Aussage über die Extrempunkte sogar Gleichheit und es folgt (b).

Da jede der Funktionen h_x , $x \in \dot{X}$ lauter nicht-verschwindende Koeffizienten hat, läßt sich Satz III 4 anwenden und wir erhalten mit Lemma IV 2, angewendet für $\alpha = 1$, und der Schlichtheit der konvexen Funktionen $\text{Spt } K_0 \subset \text{Max } K_0 = E^1$ und damit (c).

Satz IV 10 (b) besagt, daß $G^1 \subset \text{Exp } \overline{CO} E^1 = \text{Exp } \overline{CO} K_0$, und mit A9 (c) folgt der erste Teil von (d). Analog bekommen wir die zweite Teilaussage durch Anwendung von Satz IV 10 (c) und A5 (b).

(e) Da nach Satz 2 die Familie K_0 in P_0 liegt, folgt der Verzerrungssatz

$$|\arg f(z)| \leq 2 \arcsin |z| \quad \text{für } f \in K_0$$

aus Satz IV 5 (b). Die weiteren Aussagen von (e) folgen aus Satz IV 9 (b)-(d), während Satz IV 9 (a) die Aussage (f) ergibt.

(g) ist schließlich eine Folge von Satz IV 11, ebenfalls zusammen mit $K_0 \subset P_0$.

Wir merken an, daß sich die Abschätzungen in (g) - wie auch bei den nachfolgend untersuchten Klassen - sogar in einer verschärften Form direkt aus den entsprechenden Resultaten bei der Normierung N herleiten lassen. □

Bei den nachfolgend untersuchten Familien verlaufen die Beweise analog zu dem hier vorgeführten, und wir geben nur die verwendeten Sätze an.

Sternförmige Funktionen

Wir betrachten zunächst die Familie

$$\text{St}_O^1 := \text{St}^{1*} \cap N_O.$$

Dies ist die zu St^O analoge Familie in N_O .

Natürlich ist $\text{St}_O^1 \cup \{1\}$ drehungsinvariant und kompakt. Nun benutzen wir die folgende geometrische Eigenschaft eines sternförmigen Gebiets.

Lemma 4.

Jeder Punkt des Komplements eines von $\mathbb{C}$ verschiedenen sternförmigen Gebiets G bzgl. a liegt auf einem bzgl. a radialen Strahl, dessen Komplement G enthält.

Wieder impliziert also die geometrische Charakterisierung eine Subordinationseigenschaft. Mit dem Ursprung müssen im Fall $a = 1$ alle negativ reellen Werte ausgelassen werden, und wir erhalten mit Satz III 6

Satz 5.

$\text{Max St}_O^1 = E_1^2$, also ist St_O^1 einfach, und es gilt $\text{St}_O^1 \subset S_1^2$.

Satz 6.

$$(a) \quad \overline{\text{co}} \text{St}_O^1 = \overline{\text{co}} E_1^2$$

$$(b) \quad \overline{\text{co}} \text{St}_O^1 = \text{Spt St}_O^1 = \text{Exp St}_O^1 = E_1^2$$

$$(c) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 4 \arctan r \quad \text{für alle } f \in \text{St}_O^1, r \in [0, 1[,$$

falls $r \in [0, \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1]$ auch für alle $f \in \overline{\text{co}} \text{St}_O^1$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{\text{co}} \text{St}_O^1$, die an der Stelle $\tan \frac{\pi}{8}$ verschwindet.

(d) Für alle $f \in St_0^1$, $z \in \mathbb{D}$ gilt: $|f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2$,

$$|f^{(n)}(z)| \leq 4n! \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}, \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 4n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Wir benötigen zum Beweis die Ergebnisse von Satz 5 und ferner für (a) Satz III 1, für (b) Satz III 4, Lemma IV 2 und die Beziehung

$$E_1^2 \stackrel{\text{II 5 (d)}}{\subset} \overline{E_0} St_0^1 \stackrel{\text{III 1}}{\subset} E_1^2,$$

Exponiertheit liegt bzgl. der Drehungen von $a_1(f)$ vor, für (c) brauchen wir Satz IV 6 und Satz IV 8 (b)-(d) und für (d) Satz IV 11. $\square$

Nun heben wir die Sonderstellung des Punktes 1 auf und betrachten beliebige sternförmige Gebiete, die den Ursprung nicht enthalten. Die entsprechende Familie N_0 -normierter Funktionen bezeichnen wir mit

$$St_0 := \{f \in S_0 \mid f \text{ sternförmig}\}.$$

$St_0 \cup \{1\}$ ist drehungsinvariant und kompakt.

Mit Hilfe der geometrischen Beschreibung sternförmiger Gebiete nach Lemma 4 sehen wir wegen der Ausnahmestellung des Ursprungs, daß jedes solche sternförmige Gebiet in einem Gebiet mit geradlinigem Schlitz liegt, der im Ursprung beginnt, und wir erhalten mit Satz III 6:

Satz 7.

$\text{Max } St_0 = E^2$, also ist St_0 einfach und es gilt $St_0 \subset S^2$.

Satz 8.

$$(a) \quad \overline{CO} \text{ St}_O = \overline{CO} E^2$$

$$(b) \quad E\overline{CO} \text{ St}_O \subset E^2$$

$$(c) \quad \text{Spt St}_O \subset E^2$$

$$(d) \quad G^2 \subset \text{Exp St}_O, \quad \bar{G}^2 \subset \text{Spt St}_O$$

$$(e) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 4 \arcsin r \quad \text{für alle } f \in \text{St}_O, r \in [0,1[,$$

$$\text{falls } r \in [0, \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}[\quad \text{auch für alle } f \in \overline{CO} \text{ St}_O .$$

Es gibt eine Funktion in $\overline{CO} \text{ St}_O$, die an der Stelle $\sin \frac{\pi}{8}$ verschwindet.

$$(f) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 8 \arctan r \quad \text{für alle } f \in \text{St}_O$$

und alle $r_1, r_2 \leq r$.

$$(g) \quad \text{Für alle } f \in \text{St}_O, z \in \mathbb{D} \text{ gilt: } |f(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2 ,$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq 4n! \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}} , \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 4n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Wir benötigen zum Beweis die Ergebnisse von Satz 7 und ferner für

(a) und (b) Satz III 1, für (c) Satz III 4 und Lemma IV 2, für (d) Satz IV 10 (b)-(c), A9(c) sowie A5(b), für (e) Satz IV 5 (b) und Satz IV 9 (b)-(d), für (f) Satz IV 9 (a) und für (g) Satz IV 11. $\square$

Bemerkung.

Im Gegensatz zu N gelingt es also hier, mit der verwendeten geometrischen Methodik zu genauen Resultaten zu gelangen.

Analytisch sind sternförmige Funktionen bezüglich anderer Punkte als den Bildpunkt des Ursprungs schwieriger zu fassen.

Nahezu-konvexe Funktionen

Wir betrachten die Familien

$$C_0(\beta) := C^*(\beta) \cap N_0 \quad \text{für } \beta \in \mathbb{R}^+.$$

$C_0(\beta) \cup \{1\}$ ist drehungsinvariant und kompakt.

Für $\beta \in [0,1]$ sind alle nahezu-konvexen Funktionen schlicht, und es existiert eine genaue geometrische Beschreibung der Bildgebiete (siehe Pommerenke [36]).

Satz 9.

Sei $\beta \in [0,1]$.

Das Komplement eines nahezu-konvexen Gebiets der Ordnung β ist die disjunkte Vereinigung von Strahlen.

Mit jedem dieser Strahlen ist ein voller symmetrischer Sektor vom Winkel $(1-\beta)\pi$ im Komplement enthalten.

Nun lassen sich in derselben Art wie zuvor unter Anwendung von Satz III 6 wegen der Sonderstellung des ausgelassenen Ursprungs folgende geometrische Aussagen notieren.

Satz 10.

Sei $\beta \in [0,1]$. Dann gilt

$\max C_0(\beta) = E^{\beta+1}$, also ist $C_0(\beta)$ einfach, und es gilt

$$C_0(\beta) \subset S^{\beta+1}.$$

Satz 11.

Sei $\beta \in [0,1]$. Dann gilt

$$(a) \quad \overline{CO} C_0(\beta) = \overline{CO} E^{\beta+1}$$

$$(b) \quad E\overline{CO} C_0(\beta) \subset E^{\beta+1}$$

$$(c) \quad \text{Spt } C_0(\beta) \subset E^{\beta+1}$$

$$(d) \quad G^{\beta+1} \subset \text{Exp } C_0(\beta) \quad , \quad \overline{G^{\beta+1}} \subset \text{Spt } C_0(\beta)$$

$$(e) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2(\beta+1) \arcsin r \quad \text{für alle } f \in C_0(\beta), r \in [0,1[\quad ,$$

falls $r \in [0, \sin \frac{\pi}{4(\beta+1)}[$ auch für alle $f \in \overline{C_0}(\beta)$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{C_0}(\beta)$, die an der Stelle $\sin \frac{\pi}{4(\beta+1)}$ verschwindet.

$$(f) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4(\beta+1) \arctan r$$

für alle $f \in C_0(\beta)$ und alle $r_1, r_2 \leq r$.

$$(g) \quad \text{Für alle } f \in C_0(\beta) \quad , \quad \text{alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und alle } z \in \mathbb{D} \quad \text{gilt:}$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq (h_1^{\beta+1})^{(n)} (|z|) \quad .$$

Beweis.

Der vorliegende Satz wird ganz analog zu Satz 8 mit den Ergebnissen aus den Kapiteln III und IV bewiesen. □

Bemerkung.

Definiert man für $\beta \in [0,1]$ die Obermenge von $C_0(\beta)$ der *winkelmäßig erreichbaren Funktionen der Ordnung β*

$$D_0(\beta) := \left\{ f \in S_0 \mid \begin{array}{l} \mathbb{T} \setminus f\mathbb{D} \text{ ist die Vereinigung von abgeschlos-} \\ \text{senen Sektoren des Winkels } (1-\beta)\pi \end{array} \right\} ,$$

so folgt auch hier: $\text{Max } D_0(\beta) = E^{\beta+1}$ und somit mit Satz III 1 und Satz III 6: $\overline{C_0} D_0(\beta) = \overline{C_0} E^{\beta+1}$, und alle Aussagen des Satzes 11 gelten auch in $D_0(\beta)$.

Insbesondere gilt also für $f \in D_0(1)$, der Menge der *linear erreichbaren Funktionen*, die Koeffizienten-Abschätzung

$$|a_n(f)| \leq 4n.$$

Funktionen mit beschränkter Randdrehung

Wir betrachten die Familien

$$V_0(k) := V^*(k) \cap N_0 \quad \text{für } k \geq 2.$$

$V_0(k) \cup \{1\}$ ist drehungsinvariant und kompakt. Für $k \in [2, 4]$ sind alle Funktionen von beschränkter Randdrehung schlicht. Für alle $k \geq 2$ gilt der folgende Zusammenhang mit den Familien nahezu-konvexer Funktionen (siehe Schober [40], S. 24):

Lemma 12.

Für alle $k \geq 2$ ist $V^*(k) \subset C^*\left(\frac{k}{2} - 1\right)$.

Somit lassen sich Satz 10 und Satz 11 übertragen.

Satz 13.

Sei $k \in [2, 4]$. Dann gilt

$\max V_0(k) = E^{\frac{k}{2}}$, also ist $V_0(k)$ einfach, und es gilt

$$V_0(k) \subset S^{\frac{k}{2}}.$$

Satz 14.

Sei $k \in [2, 4]$. Dann gilt

$$(a) \quad \overline{\text{co}} V_0(k) = \overline{\text{co}} E^{\frac{k}{2}}$$

$$(b) \quad E \overline{\text{co}} V_0(k) \subset E^{\frac{k}{2}}$$

$$(c) \quad \text{Spt } V_0(k) \subset E^{\frac{k}{2}}$$

$$(d) \quad G^{\frac{k}{2}} \subset \text{Exp } V_0(k), \quad \overline{G^{\frac{k}{2}}} \subset \text{Spt } V_0(k)$$

(e) $|\arg f(re^{i\theta})| \leq k \cdot \arcsin r$ für alle $f \in V_0(k)$, $r \in [0, 1]$, falls $r \in [0, \sin \frac{\pi}{2k}[$ auch für alle $f \in \overline{\text{co}} V_0(k)$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{\text{co}} V_0(k)$, die an der Stelle $\sin \frac{\pi}{2k}$ verschwindet.

(f) $|\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 2k \cdot \arctan r$ für alle $f \in V_0(k)$ und alle $r_1, r_2 \leq r$.

(g) Für alle $f \in V_0(k)$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \left(h_1^{\frac{k}{2}}\right)^{(n)} (|z|).$$

Bemerkung.

Wie im Fall der Normierung N für $k \geq 4$ bewiesen wurde, ist dort $\overline{\text{co}} C\left(\frac{k}{2} - 1\right) = \overline{\text{co}} V(k)$ (siehe Schober [40], S. 25).

Nach 11a und 14a gilt für $k \in [2, 4]$: $\overline{\text{co}} C_0\left(\frac{k}{2} - 1\right) = \overline{\text{co}} V_0(k)$. Dies ist für $k \in]2, 4[$ bei der Normierung N nicht bekannt.

Konvexe Funktionen in Richtung der imaginären Achse

Wir betrachten die Familie

$$KI_0 := KI^* \cap N_0.$$

$KI_0 \cup \{1\}$ ist drehungsinvariant und kompakt.

Aus der Definition und Satz III 6 folgt sofort:

Satz 15.

$\text{Max } KI_0 = E_i^2 \cup E_{-i}^2$, also ist KI_0 einfach, und es gilt $KI_0 \subset S_i^2 \cup S_{-i}^2$.

Satz 16.

$$(a) \quad \overline{\text{co}} KI_0 = \overline{\text{co}} (E_i^2 \cup E_{-i}^2)$$

$$(b) \quad E\overline{\text{co}} KI_0 = \text{Max } KI_0$$

$$(c) \quad \text{Spt } KI_0 = \text{Max } KI_0$$

$$(d) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 4 \operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{2}}{r} - 1\right)$$

für alle $f \in KI_0$ und $r \in [0, 1]$,

falls $r \in [0, \sqrt{2}-1[$ auch für alle $f \in \overline{\text{co}} KI_0$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{\text{co}} KI_0$,

die an der Stelle $\sqrt{2}-1$ verschwindet.

$$(e) \quad |\arg f(r_1 e^{i\theta_1}) - \arg f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq 4 \arctan \frac{\sqrt{2} r}{1-r^2}$$

für alle $f \in KI_O$ und alle $r_1, r_2 \leq r$.

(f) Für alle $f \in KI_O$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n(f)| \leq 2\sqrt{1+n^2}.$$

Beweis.

(a) folgt wie üblich aus Satz 15 und Satz III 1,

(b) " $\subset$ " folgt aus Satz III 1, " $\supset$ " aus der Drehungsinvarianz und der Spiegelungsinvarianz von KI_O (mit $f \in KI_O$ ist auch $g \in KI_O$, wobei $g(z) = f(\bar{z})$), denn wäre eine Funktion aus $E_i^2 \cup E_{-i}^2$ nicht extrem in $\overline{co} KI_O$, so auch alle anderen, im Widerspruch zu Kreĭn-Mil'man.

(c) " $\subset$ " folgt aus Satz III 4, " $\supset$ " sieht man durch Betrachtung der Funktionale vom Typ $L(f) = w a_1(f)$, $w \in \mathbb{C}$.

(d) Wegen der Spiegelungsinvarianz von KI_O genügt es zu zeigen, daß

$$\max_{f \in KI_O} \max_{\theta \in \mathbb{R}} \arg f(re^{i\theta}) = 4 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{2}}{r} - 1 \right).$$

Wir wissen wegen Satz 15 und Satz IV 6, daß gilt

$$\begin{aligned} \max_{f \in KI_O} \max_{\theta \in \mathbb{R}} \arg f(re^{i\theta}) &= 4 \arctan \frac{r \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - r \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 4 \arctan \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{r} - 1} = 4 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{2}}{r} - 1 \right). \end{aligned}$$

Dies gilt auch für $f \in \overline{co} KI_O$, solange r kleiner als der Halbebenenradius R ist, für den gilt:

$$4 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{2}}{R} - 1 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dies führt zu $R = \sqrt{2} - 1$.

Der Rest folgt wieder mit Satz IV 7.

(e) folgt aus Satz IV 8.

(f) Für $g(z) = \left(\frac{1+iyz}{1-yz}\right)^2$, also $g \in E_1^2 \cup E_{-1}^2$ gilt

$$a_n(g) = 2y^n(1 \pm ni) .$$

Wegen (c) folgt also

$$|a_n(f)| \leq 2\sqrt{1+n^2} \quad \text{für alle } f \in KI_O .$$

Es ist leicht zu sehen, daß für jedes n ein y existiert, bei dem der maximale Wert angenommen wird.

Allerdings ist dies im Gegensatz zu den bisherigen Ergebnissen nicht für jedes n dasselbe y . □

Funktionen mit symmetrischen Bildgebieten

In Analogie zu den Funktionen aus N mit reellen Koeffizienten stehen in N_O Funktionen mit symmetrischem Bildgebiet bzgl. der reellen Achse.

Aus $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ und der Schlichtheit folgt nämlich die Äquivalenz dieser beiden Forderungen.

Wir schreiben für beliebiges $F \subset N_O$

$$F(\text{sym}) := \{f \in F \mid f \text{ D symmetrisch bzgl. der reellen Achse}\} .$$

Wir erhalten mittels der Geometrie und Satz III 6 folgenden Satz:

Satz 17.

$$(a) \quad \text{Max } K_O(\text{sym}) = \text{Max } KI_O(\text{sym}) = E_1^1 ,$$

die Familien sind einfach, und es gilt:

$$K_O(\text{sym}) \subset KI_O(\text{sym}) \subset S_1^1 \subset P ,$$

$$(b) \quad \text{Max } S_O(\text{sym}) = \text{Max } St_O^1(\text{sym}) = \text{Max } St_O(\text{sym}) = E_1^2 ,$$

die Familien sind einfach, und es gilt:

$$St_O^1(\text{sym}) \subset St_O(\text{sym}) \subset S_O(\text{sym}) \subset S_1^2 .$$

(c) $\text{Max } C_O(\alpha-1, \text{sym}) = \text{Max } V_O(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$ für $\alpha \in [1, 2]$,
 die Familien sind einfach, und es gilt:
 $V_O(2\alpha, \text{sym}) \subset C_O(\alpha-1, \text{sym}) \subset S_1^\alpha$.

Nun bekommen wir wieder Extrempunkt- und Verzerrungsaussagen.

Satz 18.

$$(a) \quad \overline{CO} K_O(\text{sym}) = \overline{CO} KI_O(\text{sym}) = \overline{CO} E_1^1 = P$$

$$(b) \quad \overline{ECO} K_O(\text{sym}) = \overline{ECO} KI_O(\text{sym}) = E_1^1$$

$$(c) \quad \text{Spt } K_O(\text{sym}) = \text{Spt } KI_O(\text{sym}) = E_1^1$$

$$(d) \quad \text{Exp } K_O(\text{sym}) = \text{Exp } KI_O(\text{sym}) = E_1^1$$

$$(e) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2 \arctan r$$

für alle $f \in \overline{CO} KI_O(\text{sym})$, $r \in [0, 1[$.

$$(f) \quad \text{Für alle } f \in KI_O(\text{sym}), z \in \mathbb{D} \text{ gilt: } |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq 2 \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}, \text{ insbesondere } |a_n(f)| \leq 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 19.

Für $S_O(\text{sym})$, $St_O^1(\text{sym})$ sowie $St_O(\text{sym})$ gilt vollständig Satz 6,
 wobei St_O^1 durch die hier genannten Mengen ersetzt wird.

Satz 20.

Sei $\alpha \in [1, 2]$. Dann gilt

$$(a) \quad \overline{CO} C_O(\alpha-1, \text{sym}) = \overline{CO} V_O(2\alpha, \text{sym}) = \overline{CO} E_1^\alpha$$

$$(b) \quad \overline{ECO} C_O(\alpha-1, \text{sym}) = \overline{ECO} V_O(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$$

$$(c) \quad \text{Spt } C_O(\alpha-1, \text{sym}) = \text{Spt } V_O(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$$

$$(d) \quad \text{Exp } C_O(\alpha-1, \text{sym}) = \text{Exp } V_O(2\alpha, \text{sym}) = E_1^\alpha$$

$$(e) \quad |\arg f(re^{i\theta})| \leq 2\alpha \arctan r$$

für alle $f \in C_0(\alpha-1, \text{sym})$, $r \in [0, 1[$,

falls $r \in [0, \tan \frac{\pi}{4\alpha}[$ auch für alle $f \in \overline{C_0}(\alpha-1, \text{sym})$.

Es gibt eine Funktion in $\overline{C_0}(\alpha-1, \text{sym})$, die an der Stelle $\tan \frac{\pi}{4\alpha}$ verschwindet.

(f) Für alle $f \in C_0(\alpha-1, \text{sym})$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$|f^{(n)}(z)| \leq (h^\alpha)^{(n)}(|z|).$$

Beweis.

Die Sätze 18 bis 20 werden analog zu Satz 6 bewiesen. □

VI. Familien von Funktionen mit reellen Koeffizienten

Sei für eine Menge $F \subset N_0$

$$F(R) := \{f \in F \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Hallenbeck und MacGregor [19] zeigten vor kurzem

Satz 1 (siehe [19], S. 528 und Theorem 9).

$$(a) \quad EP(R) = \{f \mid f(z) = \frac{1-z^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y\} \text{ und}$$

$$Spt P(R) = co EP(R).$$

(b) Für $\alpha > 1$ ist

$$Spt P_1^\alpha(R) = \overline{ECO} P_1^\alpha(R) = (EP(R))^\alpha.$$

Bemerkung.

Die Extrempunkte von $P(R)$ bestehen aus den beiden maximalen Elementen $\frac{1+z}{1-z}$ und $\frac{1-z}{1+z}$, sowie aus einem Teil derjenigen Funktionen, die jeden Punkt der rechten Halbebene genau zweimal annehmen. Dies ergibt sich aus der Rationalität 2. Grades und der Tatsache, daß für $z \in \partial D$

$$\operatorname{Re} \frac{1-z^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} = 0$$

ist.

Allerdings sind nicht alle Funktionen mit dieser Eigenschaft

extrem. Z.B. ist zwar $\frac{1-z^2}{1+z^2}$ (für $y := i$) extrem, aber

$$\frac{1+z^2}{1-z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$$

hat eine konvexe Darstellung in $P(R)$.

Da die Extrempunkte nicht alle schlicht sind, kann die gewonnene Darstellung nicht dazu benutzt werden, die Extrempunkte in

$P(R) \cap S_0$ oder in $P(R) \cap K_0 = K_0(R)$ anzugeben.

Aus der Symmetrie zur reellen Achse folgt $P_0^1(R) = P_1^1(R)$ und damit auch $P_0^\alpha(R) = (P_0^1(R))^\alpha = (P_1^1(R))^\alpha = P_1^\alpha(R)$.
Damit beinhaltet Satz 1 bereits alles über die Extremalstruktur von $P_0^\alpha(R)$, $\alpha \geq 1$.

Wir wenden uns jetzt der Menge $S_0(R)$ zu. Da in $P_0^2(R)$, einer Obermenge von $S_0(R)$, auch nicht-schlichte Funktionen Extrempunkte sind, können die Ergebnisse nicht übertragen werden. Wir wenden eine Idee von Brickman an, um die Extrempunkte von $S_0(R)$ geometrisch zu charakterisieren.

Satz 2.

Läßt $f \in S_0(R)$ einen Wert $a \notin \mathbb{R}$ aus, so hat f eine konvexe Darstellung mit zwei verschiedenen Funktionen aus $S_0(R)$, die offene Mengen auslassen.

Beweis.

Wegen der Symmetrie des Bildgebiets zur reellen Achse folgt, daß auch $\bar{a}$ nicht angenommen wird. Da $a \notin \mathbb{R}$, kennen wir nun zwei nicht angenommene Punkte, die auf einer Ellipse mit Brennpunkten in 0 und 1 liegen, und wir können die Methode von Brickman ([5], siehe DS [14], Theorem 1) anwenden. Somit hat f die Darstellung

$$f = t f_1 + (1-t) f_2 \quad \text{mit } t \in]0,1[\quad \text{und}$$

$$f_k := \psi_k \circ f \in S_0, \quad \psi_{1,2}(w) := \frac{w \pm \psi(w) \mp \psi(0)}{1 \pm \psi(1) \mp \psi(0)}$$

mit

$$\psi(w) := \sqrt{(w-a)(w-\bar{a})}.$$

Wir brauchen nun nur zu zeigen, daß f_k oder äquivalent dazu ψ (entwickelt um den Punkt 1) reelle Koeffizienten hat. Nun ist aber für $w \in \mathbb{R}$

$$\psi(w) = \pm |w-a| \in \mathbb{R},$$

woraus diese Behauptung folgt. □

Satz 3.

$$\overline{E\mathcal{C}O} S_0(R) \subset E(S_0(R) \cup \{1\})$$

$$\subset \{f \in S_0(R) \mid f(z) = \frac{(1 \pm z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y\} =: \Omega.$$

Beweis.

Wegen Satz 2 läßt ein Extrempunkt von $S_0(R)$ nur reelle Werte aus.

Mit dem Ursprung müssen automatisch alle negativ reellen Werte ausgelassen werden. Es gibt zwei zusätzliche Möglichkeiten:

(1) $]-\infty, \varepsilon] \subset \mathbb{C} \setminus f\mathbb{D}$ für ein $\varepsilon \in]0, 1[$

und/oder

(2) $[1+\varepsilon, \infty[\subset \mathbb{C} \setminus f\mathbb{D}$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Wir zeigen nun, daß ein Extrempunkt von $S_0(R) \cup \{1\}$ die Eigenschaft (1) nicht besitzt. Jede Funktion g aus $S_0(R)$, die nur reelle Werte ausläßt und die Eigenschaft (1) besitzt, hat offenbar wegen der Normierung die Darstellung

$$g = \frac{f+\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot f + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot 1,$$

wobei f ebenfalls in $S_0(R)$ liegt und nur reelle Werte ausläßt. Dies ist aber eine konvexe Darstellung innerhalb $S_0(R) \cup \{1\}$ (und damit in $\overline{CO} S_0(R)$).

Es sind also nur Funktionen aus der Menge

$\{f \in S_0(R) \mid f \text{ läßt die negative reelle Achse und höchstens, einen weiteren Strahl auf der reellen Achse aus}\}$

mögliche Extrempunkte. Man weist leicht die Gleichheit dieser Menge mit Ω nach. □

Auf gleiche Weise folgt das Ergebnis für $S(R)$.

Korollar 4.

$$\overline{\text{Eco}} S(R) = ES(R) = \left\{ f \in N \mid f(z) = \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y \right\}.$$

Beweis.

Die Inklusionskette

$$\overline{\text{Eco}} S(R) \subset ES(R) \subset \left\{ f \in N \mid f(z) = \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y \right\} =: I$$

folgt aus den Überlegungen von Satz 2 mit der Brickman-Darstellung von Funktionen in S (siehe Duren [13], Theorem 9.5). I ist genau die Menge aller Funktionen aus $S(R)$, die nur reelle Werte auslassen.

$I \subset \overline{\text{Eco}} S(R)$ folgt aus Satz 1(a), da die dort auftretende Extrempunktmenge dieselbe Abhängigkeit von dem Parameter y besitzt (siehe BMW [9], Theorem 1(d)). $\square$

Bemerkung.

Die Aussage $\overline{\text{Eco}} S(R) = I$ wurde von BMW [9], Theorem 4, mit anderen Methoden hergeleitet.

Wir wenden uns nun wieder der Stützpunktfrage zu.

Satz 5.

$$\text{Sei } \tilde{\Omega} := \Omega \cup \left\{ f \in S_0(R) \mid \begin{array}{l} f(z) = 1 + \kappa \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y, \\ \kappa \in]-2(1-\text{Re } y), 2(1+\text{Re } y)[\end{array} \right\}.$$

Dann gilt

$$\text{Spt } S_0(R) \subset \tilde{\Omega}.$$

Beweis.

Der Beweis wird analog zu Satz III 3 geführt. Sei $L \in A'$ nicht konstant in $S_0(R)$.

Für einen Stützpunkt $g \in S_0(R)$ bzgl. L gilt

$$(3) \quad M := \operatorname{Re} Lg = \max_{h \in S_0(R)} \operatorname{Re} Lh.$$

Wegen der Vorgabe über die Extrempunkte nach Satz 3 hat g die Choquet-Darstellung

$$(4) \quad g(z) = \int_Y \frac{(1+z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} d\mu_+ + \int_Y \frac{(1-z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} d\mu_-$$

mit positiven Maßen μ_+ und μ_- , $\mu_+(Y) + \mu_-(Y) = 1$, deren

Träger in $\left\{ y \in Y \mid \frac{(1 \pm z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \in \overline{\operatorname{ECO}} S_0(R) \right\}$ liegen.

Hieraus folgt, daß μ_+ -fast überall bzw. μ_- -fast überall auf Y gilt

$$(5) \quad \operatorname{Re} L \left(\frac{(1+z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \right) = M \quad \text{ sowie } \\ \operatorname{Re} L \left(\frac{(1-z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \right) = M.$$

Seien $H_{\pm}$ die Teilmengen von Y , in denen (5) gilt.

Die Funktionen $\ell_{\pm}$, die durch

$$\ell_{\pm}(y) := L \left(\frac{(1 \pm z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \right)$$

definiert werden, sind analytisch in einer Umgebung von Y als Funktionen von y .

Nehmen wir nun an, z.B. H_+ habe unendlich viele Elemente. Dann folgt wegen (5) mit der verallgemeinerten Argumentation von Satz III 3 (siehe [19], Theorem 9) die Konstanz von ℓ_+ .

Daraus folgt mit $y=-1$, daß auch die konstante Funktion 1 Stützpunkt bzgl. L ist. Wegen der Darstellung

$$1 = \frac{1+z^k}{2} + \frac{1-z^k}{2}, \quad k \geq 1$$

folgt $1 \pm z^k \in \text{Spt}_L S_O(R)$. Daraus folgt, daß die Toeplitz-Koeffizienten b_k von L für $k \geq 1$ alle verschwinden.

Dies ist ein Widerspruch zur Nicht-Konstanz von L in $S_O(R)$.

Also sind H_+ sowie H_- endlich, und (4) wird zu einer endlichen konvexen Darstellung mit Punkten aus $\overline{\text{ECO}} S_O(R)$.

Sobald allerdings eine echte Darstellung mit mindestens zwei Punkten vorliegt, ist die dargestellte Funktion g entweder nicht schlicht, da g Pole auf ∂D mit einer Gesamtordnung von mindestens vier hat (siehe BMW [9], Theorem 12), oder g ist von der Form ($t \in]0,1[$)

$$\begin{aligned} g(z) &= t \frac{(1+z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} + (1-t) \frac{(1-z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)} \\ &= 1 + (4t-2+2\text{Re } y) \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}. \end{aligned}$$

Da g in N_O liegt, folgt dann die angegebene Darstellung. $\square$

Bemerkung.

Eine entsprechende Aussage für $S(R)$ wurde von BMW [9], Theorem 12 bewiesen.

Zum Schluß vermerken wir, daß aus der Sternförmigkeit und Nahezu-Konvexität der Elemente aus $\tilde{\Omega}$ folgt:

Korollar 6.

$$(a) \quad \text{St}_O^1(R) \subset \text{St}_O(R) \subset V_O(4,R) \subset C_O(1,R) \subset S_O(R),$$

$$(b) \quad \overline{\text{co}} \text{St}_O^1(R) = \overline{\text{co}} \text{St}_O(R) = \overline{\text{co}} V_O(4,R) = \overline{\text{co}} C_O(1,R) = \overline{\text{co}} S_O(R)$$

und daher

$$(c) \quad \overline{\text{Eco}} \text{ St}_O^1(R) = \overline{\text{Eco}} \text{ St}_O(R) = \overline{\text{Eco}} V_O(4, R) = \overline{\text{Eco}} C_O(1, R) = \overline{\text{Eco}} S_O(R) \subset \Omega$$

sowie

$$(d) \quad \text{Spt St}_O^1(R) = \text{Spt St}_O(R) = \text{Spt } V_O(4, R) = \text{Spt } C_O(1, R) = \text{Spt } S_O(R) \subset \tilde{\Omega}.$$

Beweis.

Aus A6 folgt (b) und hieraus (c) mithilfe Satz 3.

(d) Da alle auftretenden Mengen F dieselbe abgeschlossene konvexe Hülle haben, folgt aus den Überlegungen in A9(b):

$\text{Spt } F \subset \text{Spt } S_O(R)$. Jeder Stützpunkt bzgl. L von $S_O(R)$ ist wegen $\tilde{\Omega} \subset F$ auch in F Stützpunkt bzgl. L , wenn L nicht konstant in F ist.

Nun folgt unsere Behauptung, wenn wir zeigen, daß in $\text{St}_O^1(R)$ nur die trivialen Funktionale $L(f) = b_O a_O(f)$ konstant sind.

Habe das in $\text{St}_O^1(R)$ konstante Funktional $L \in A'$ die Toeplitz-Koeffizienten b_n . Da für kleine $a_1 \in \mathbb{R}^+$ die Funktion f mit

$f(z) = 1 + a_1 z$ in $\text{St}_O^1(R)$ liegt, folgt $b_1 = 0$, ebenso liegen für alle $n \geq 2$ die Funktionen f_ε mit $f_\varepsilon(z) = 1 + a_1 z + \varepsilon z^n$ für kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ in $\text{St}_O^1(R)$, woraus folgt, daß alle Toeplitz-Koeffizienten b_n , $n \geq 1$ verschwinden. $\square$

AnhangDie Sätze von Krein-Mil'man und Choquet

Sei immer V ein lokal-konvexer Vektorraum, $F, G, \dots \subset V$.

KM 1 Krein-Mil'man

F kompakt $\Rightarrow \overline{\text{co}} F = \overline{\text{co}} EF$, insbesondere $EF \neq \emptyset$.

KM 2 Mil'man

F und $\overline{\text{co}} F$ kompakt $\Rightarrow E\overline{\text{co}} F \subset F$.

Ch 3 Choquet

V metrisierbar, F kompakt und konvex $\Rightarrow$

$$F = \left\{ f \mid f = \int_{EF} g \, d\mu_f, \mu_f \in \text{PM}(EF) \right\}$$

mit $\text{PM}(EF) := \{ \mu \mid \mu \text{ Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß über } EF \}$

Folgerungen und weitere AussagenA 4

F und $\overline{\text{co}} F$ kompakt $\Rightarrow E\overline{\text{co}} F \subset EF$.

Beweis.

Anwendung von 2 zusammen mit 5(a). □

A 5

$F \subset G \Rightarrow$

(a) $EG \cap F \subset EF$

(b) $L \in V'$ nicht const.in $F \Rightarrow (\text{Spt}_L G) \cap F \subset \text{Spt}_L F$

(c) $\text{Exp } G \cap F \subset \text{Exp } F$

Beweis.

(a) Für $f \in F$ gilt: $f \notin EF \Rightarrow f \notin EG$.

(b) und (c) Sei $f \in F \wedge f \in \overset{\text{Spt}_L}{\text{Exp}} G$, dann gilt:

$$\forall g \in G \setminus \{f\} \quad (\text{Re } Lf \geq \text{Re } Lg),$$

insbesondere gilt dies für alle $g \in F \setminus \{f\}$, also ist $f \in \overset{\text{Spt}_L}{\text{Exp}} F$. $\square$

A 6

$F \subset G$, F kompakt und konvex, G und $\overline{\text{co}} G$ kompakt $\Rightarrow$

$$(EG \subset F \Rightarrow F = G).$$

Beweis.

Nach Voraussetzung gilt: $EG \overset{5}{\subset} EF = \overline{\text{eco}} F \wedge \overline{\text{eco}} G \overset{4}{\subset} EG \Rightarrow$

$$\overline{\text{eco}} G \subset \overline{\text{eco}} F \Rightarrow \overline{\text{co}} \overline{\text{eco}} G \subset \overline{\text{co}} \overline{\text{eco}} F \overset{1}{\Rightarrow} \overline{\text{co}} G \subset F. \quad \square$$

A 7

F und $\overline{\text{co}} F$ kompakt, $L \in V'$ und sei $F = \bigcup_{t \in T} F_t$. Dann gilt

$$(a) \quad EF \subset \bigcup_{t \in T} EF_t$$

$$(b) \quad \overline{\text{eco}} F \subset \bigcup_{t \in T} \overline{\text{eco}} F_t.$$

$$(c) \quad \forall t \in T \quad (L \neq \text{const. in } F_t) \Rightarrow (\text{Spt}_L F \subset \bigcup_{t \in T} \text{Spt}_L F_t)$$

$$(d) \quad \text{Exp } F \subset \bigcup_{t \in T} \text{Exp } F_t.$$

Beweis.

(a) $f \in F_t \setminus EF_t \Rightarrow f$ hat eine konvexe Darstellung in F_t , also in $F \Rightarrow f \notin EF$.

(b) Sei $f \in \overline{\text{eco}} F$. Dann folgt wegen KM 2: $f \in F$.

Somit gibt es ein $t \in T$ mit $f \in \overline{\text{co}} F_t$. Wäre nun $f \notin \overline{\text{eco}} F_t$, so bekämen wir eine Darstellung in $\overline{\text{co}} F_t$, und damit einen Widerspruch.

(c) und (d) Sei $f \in \overset{\text{Spt}_L}{\text{Exp}} F$. Für ein $t \in T$ gilt $f \in F_t$, also

$$\forall g \in F_t \setminus \{f\} (\operatorname{Re} Lf \stackrel{\geq}{>} \operatorname{Re} Lg) ,$$

$$\text{d.h. } f \in \overset{\operatorname{Spt}_L}{\operatorname{Exp}} F_t .$$

□

A 8

$$F \text{ und } \overline{\operatorname{co}} F \text{ kompakt} \Rightarrow \overline{\operatorname{Eco}} F \subset \overline{\operatorname{Spt}} F .$$

Beweis (BW [10], S. 231).

Zunächst ist $F \subset \overline{\operatorname{co}} \operatorname{Spt} F$ mit Beweis wie für KM 1 (genauer gilt sogar $F \subset \overline{\operatorname{co}} (\operatorname{Spt} F \cap \overline{\operatorname{Eco}} F)$). Daraus folgt $\overline{\operatorname{co}} \operatorname{Spt} F = \overline{\operatorname{co}} F$, und wegen der Kompaktheit von $\overline{\operatorname{Spt}} F$ sowie $\overline{\operatorname{co}} \overline{\operatorname{Spt}} F$ erhalten wir mit KM 2: $\overline{\operatorname{Eco}} \operatorname{Spt} F \subset \overline{\operatorname{Spt}} F$. □

A 9

F und $\overline{\operatorname{co}} F$ kompakt in metrisierbarem $V \Rightarrow$

$$(a) \quad \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \subset \overline{\operatorname{Eco}} F$$

$$(b) \quad \operatorname{Spt} F \subset \operatorname{Spt} \overline{\operatorname{co}} F$$

$$(c) \quad \operatorname{Exp} F = \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F , \text{ insbesondere}$$

$$(d) \quad \operatorname{Exp} (\overline{\operatorname{Eco}} F) = \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F = \operatorname{Exp} F .$$

Beweis.

(a) dies ist bekanntlich eine Folge von KM 1, da bzgl. jedes Funktionalsmindestens ein Stützpunkt extrem sein muß.

(b) Sei $f \in \operatorname{Spt} F$ und $h \in \overline{\operatorname{co}} F$.

Dann gilt

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \quad h_n = \sum_{k=1}^m t_k g_k, \quad g_k \in F, \quad t_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m t_k = 1.$$

Da $f \in \operatorname{Spt} F$, gilt für ein $L \in V'$

$$\operatorname{Re} Lg_k \leq \operatorname{Re} Lf .$$

Für h_n folgt:

$$\operatorname{Re} Lh_n = \operatorname{Re} L \sum_{k=1}^m t_k g_k = \sum_{k=1}^m t_k \operatorname{Re} Lg_k \leq \operatorname{Re} Lf .$$

und somit schließlich

$$\operatorname{Re} L_h \leq \operatorname{Re} L_f .$$

(c) Sei f exponiert in F bzgl. $L \in V'$. Gäbe es bzgl. L einen weiteren Stützpunkt $h \in \overline{\operatorname{co}} F$ mit der Choquet-Darstellung $h = \int g \, d\mu$, so wäre $g \in \operatorname{Spt}_L(\overline{\operatorname{co}} F)$ μ -fast überall. Da der Träger von μ in $\overline{\operatorname{Eco}} F \subset F$ liegt, ist dies ein Widerspruch zu $f \in \operatorname{Exp}_L F$. Also haben wir: $\operatorname{Exp} F \subset \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F$. Weiter folgt mit (a): $\operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \subset \overline{\operatorname{Eco}} F \subset F$ und mit 5(c) bekommen wir schließlich $\operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \subset \operatorname{Exp} F$. $\square$

A 10

F und $\overline{\operatorname{co}} F$ kompakt $\Rightarrow$

$$(EF \subset \operatorname{Exp} F \Rightarrow EF = \overline{\operatorname{Eco}} F = \operatorname{Exp} F) .$$

Beweis.

Die Teilmengenkette

$$\operatorname{Exp} F \stackrel{9(c)}{=} \operatorname{Exp} \overline{\operatorname{co}} F \stackrel{9(a)}{\subset} \operatorname{E} \overline{\operatorname{co}} F \stackrel{4}{\subset} EF$$

zeigt das Verlangte. $\square$

<u>Notationen</u>	Seite
$A := \{f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analytisch}\}$	1
$A' := \{L \mid L \text{ lineares stetiges Funktional über } A\}$	2
$B := \{\omega \in A \mid \omega(0) = 0, \omega < 1\}$	7
$BCK := \{f \in A \mid \overline{\text{Eco}} \text{ Sub } \{f\} = \{f\}\}$	14
$C^* := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ nahezu-konvex}\}$	3
$C^*(\beta) := \{f \in A \mid f \text{ nahezu-konvex der Ordnung } \beta\}$	4
$\text{co } F := \left\{ \sum_{k=1}^n t_k f_k \mid \sum_{k=1}^n t_k = 1, t_k \in [0,1], f_k \in F, n \in \mathbb{N} \right\}$	16
$\overline{\text{co } F} := \overline{\text{co } F}$	1
$\mathbb{D} := \{z \mid z < 1\}$	1
$\mathbb{D}_r := \{z \mid z < r\}$	28
$D_O(\beta) := \{f \in S_O \mid f \text{ winkelmäßig erreichbar der Ordnung } \beta\}$	46
<i>drehungsinvariante Familie</i>	9
$EF := \{f \in F \mid f \text{ Extrempunkt von } F\}$	1
$\text{Exp } F := \{f \in F \mid f \text{ exponiert in } F\}$	2
$E_x^\alpha := [h_x^\alpha]$	13
$E^\alpha := \bigcup_{x \in \dot{X}} E_x^\alpha$	24
<i>einfache Familie</i>	14
$G^\alpha := \bigcup_{\substack{x \in X \\ \arg x < \sin \frac{\pi}{2\alpha}}} [h_x^\alpha]$	36
$h_x(z) := \frac{1+xz}{1-z}$	13
<i>Halbebenen-Radius</i>	32
$K^* := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ konvex}\}$	3
$KI^* := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ konvex in Richtung der imaginären Achse}\}$	4

$\text{Max } F := \{f \in F \mid f \text{ maximal bzgl. } <\}$	8
$\text{Möb } \mathbb{D} := \{f \in A \mid f \text{ Automorphismus von } \mathbb{D}\}$	39
$N := \{f \in A \mid f(0) = 0, f'(0) = 1\}$	3
$N_0 := \{f \in A \mid f(0) = 1, f(z) \neq 0\}$	3
$P := \{f \in N_0 \mid \text{Re } f > 0\}$	1
$P_x^\alpha := \text{Sub } \{h_x^\alpha\}$	13
$P_0^\alpha := \bigcup_{x \in \dot{X}} P_x^\alpha$	24
$\text{PM}(V) := \{\mu \mid \mu \text{ Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß über } V\}$	60
$S_0 := \{f \in N_0 \mid f \text{ schlicht}\}$	3
$S^* := \{f \in A \mid f \text{ schlicht}\}$	3
$S_x^\alpha := P_x^\alpha \cap S_0$	27
$S^\alpha := \bigcup_{x \in \dot{X}} S_x^\alpha$	27
$S_0(\mathbb{R}) := \{f \in S_0 \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$	9
$\text{Spt}_L F := \{f \in F \mid f \text{ Stützpunkt bzgl. } L\}$	2
$\text{Spt } F := \bigcup_{L \in A'} \text{Spt}_L F$	2
$\text{St}^{a^*} := \{f \in S^* \mid f \mathbb{D} \text{ sternförmig bzgl. } a\}$	3
$\text{St}^* := \bigcup_{a \in \mathbb{C}} \text{St}^{a^*}$	3
<i>starke Familie</i>	9
$\text{Sub } F := \{g \mid g < f, f \in F\}$	8
<i>subordinationsinvariante Familie</i>	8
$V^*(k) := \{f \in A \mid \text{Randdrehung von } f \mathbb{D} \leq k\pi\}$	4
$X := \{x \mid x = 1\}$	5
$\dot{X} := X \setminus \{-1\}$	13
$Y := \{y \mid y = 1\}$	5
$\varphi := \arg x \in]-\pi, \pi[$	29
$\Omega := \{f \in S_0(\mathbb{R}) \mid f(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, y \in Y\}$	55
$\tilde{\Omega} := \Omega \cup \left\{f \in S_0(\mathbb{R}) \mid f(z) = 1 + \kappa \frac{z}{(1-yz)(1-\bar{y}z)}, \kappa \in \mathbb{R}, y \in Y\right\}$	56

$f < g$ oder f subordiniert zu $g : \Leftrightarrow \exists \omega \in B \ (f = g \circ \omega)$ 7

$[f]$ oder Äquivalenzklasse von $f := \{g \mid g(z) = f(xz), x \in X\}$ 8

Für eine Familie $F^* \subset A$ schreiben wir

$F := F^* \cap N$ 4

$F_0 := F^* \cap N_0$ 5

und für eine Familie $F \subset A$ schreiben wir

$F(R) := \{f \in F \mid a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ 54

$F(\text{sym}) := \{f \in F \mid f \text{ symmetrisch zur reellen Achse}\}$ 51

und für $F \subset N_0$

$F^\alpha := \{f^\alpha \mid f \in F\}$ 20

Literaturverzeichnis

- [1] Abu Muhanna, Y., MacGregor, T.H.: Extreme points of families of analytic functions subordinate to convex mappings. - Math. Z. 176, 1981, 511-519.
- [2] Aharonov, D., Friedland, S.: On an inequality connected with the coefficient conjecture for functions of bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 524, 1973, 1-14.
- [3] Biernacki, M.: Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles. - Prace Math.-Fiz. 44, 1936, 293-314.
- [4] Brannan, D.A., Clunie, J.G., Kirwan, W.E.: On the coefficient problem for functions of bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 523, 1973, 1-18.
- [5] Brickman, L.: Extreme points of the set of univalent functions. - Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1970, 372-374.
- [6] Brickman, L., Duren, P.L.: Truncation of support points for univalent function. - Complex Variables 4, 1984, 71-83.
- [7] Brickman, L., Leung, Y.L.: Exposed points of the set of univalent functions. - Bull. London Math. Soc. 16, 1984, 157-159.
- [8] Brickman, L., Leung, Y.L., Wilken, D.R.: On extreme points and support points of the class S . - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, erscheint.
- [9] Brickman, L., MacGregor, T.H., Wilken, D.R.: Convex hulls of some classical families of univalent functions. - Trans. Amer. Math. Soc. 156, 1971, 91-107.
- [10] Brickman, L., Wilken, D.R.: Subordination and insuperable elements. - Mich. Math. J. 23, 1976, 225-233.

- [11] Campbell, D.: A survey of properties of the convex combination of univalent functions. - Rocky Mountain J. Math. 5, 1975, 475-492.
- [12] Clunie, J.G.: Some remarks on extreme points in function theory.- in: Aspects of contemporary complex analysis, Proceedings Durham 1979, edited by D.A. Brannan and J.G. Clunie, Academic Press, 1980.
- [13] Duren, P.L.: Univalent functions. - Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983.
- [14] Duren, P.L., Schober, G.: Nonvanishing univalent functions. - Math. Z. 170, 1980, 195-216.
- [15] Duren, P.L., Schober, G.: Nonvanishing univalent functions II. - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, erscheint.
- [16] Friedland, S., Schiffer, M.: On coefficient regions of univalent functions. - J. Analyse Math. 31, 1977, 125-168.
- [17] Grassmann, E., Hengartner, W., Schober, G.: Support points of the class of close-to-convex functions. - Can. Math. Bull. 19, 1976, 177-179.
- [18] Hallenbeck, D.J., MacGregor, T.H.: Subordination and extreme-point theory. - Pac. J. Math. 50, 1974, 455-468.
- [19] Hallenbeck, D.J., MacGregor, T.H.: Support points of families of analytic functions described by subordination. - Trans. Amer. Math. Soc. 278, 1983, 523-546.
- [20] Hamilton, D.H.: Covering theorems for univalent functions, erscheint.

- [21] Hengartner, W., Pfluger, A., Schober, G.: On support points in the class of functions with bounded boundary rotation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 6, 1981, 213-224.
- [22] Herglotz, G.: Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis. - Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 1911, 501-511.
- [23] Hornblower, R., Wilken, D.R.: On the support points of close-to-convex functions, erscheint.
- [24] Kaplan, W.: Close-to convex schlicht functions. - Mich. Math. J. 1, 1952, 169-185.
- [25] Kirwan, W., Schober, G.: New inequalities from old ones. - Math. Z. 180, 1982, 19-40.
- [26] Koepf, W.: Close-to-convex functions and linear-invariant families. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 8, 1983, 349-355.
- [27] Lewandowski, Z.: Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I. - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 12, 1958, 131-146.
- [28] Lewandowski, Z.: Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II. - Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 14, 1960, 19-46.
- [29] MacGregor, T.H.: Applications of extreme-point theory to univalent functions. - Mich. Math. J. 19, 1972, 361-376.
- [30] Milcetic, J.G.: On the extreme points of some sets of analytic functions. - Proc. Amer. Math. Soc. 45, 1974, 223-228.

- [31] Paatero, V.: Über die konforme Abbildung von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 33: 9, 1931, 1-78.
- [32] Pearce, K.: New support points of S and extreme points of HS . - Proc. Amer. Math. Soc. 81, 1981, 425-428.
- [33] Pfluger, A.: Lineare Extremalprobleme bei schlichten Funktionen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 489, 1971, 1-31.
- [34] Phelps, R.R.: Lectures on Choquet's theorem. - Van Nostrand Math. Studies #7, Princeton - New Jersey, 1966.
- [35] Pommerenke, Ch.: Univalent functions. - Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich, 1975.
- [36] Pommerenke, Ch.: On close-to-convex analytic functions. - Trans. Amer. Math. Soc. 114, 1965, 176-186.
- [37] Reade, M.O.: The coefficients of close-to-convex functions. - Duke Math. J. 23, 1956, 459-462.
- [38] Robertson, M.S.: On the theory of univalent functions. - Ann. of Math. (2) 37, 1936, 374-408.
- [39] Schaeffer, A.C., Spencer, D.C.: Coefficient regions for schlicht functions. - Amer. Math. Soc. Colloquium Publications Vol. 35, New York, 1950.
- [40] Schober, G.: Univalent functions-selected topics. - Springer Lecture Notes 478, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

Zusammenfassung

Familien analytischer, insbesondere schlichter Funktionen im Einheitskreis, deren Elemente f der Normierung $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ genügen, sind im letzten Jahrzehnt auf Extrempunkte und Stützpunkte hin untersucht worden.

In dieser Arbeit werden Familien untersucht, deren Elemente der Normierung $f(0) = 1$ und $f(z) \neq 0$ genügen.

Es werden die Extrem- und Stützpunktmengen von Klassen konvexer, sternförmiger, nahezu-konvexer und anderer durch geometrische Eigenschaften der Bildgebiete ausgezeichneten Funktionen charakterisiert, und es werden konkrete Extremalprobleme gelöst.

Lebenslauf

Name: Wolfram Koepf

Geburtsdatum: 16.7.1953

Geburtsort: Stuttgart

Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulausbildung:

1960 - 1964 Besuch der Friedens-Grundschule
in Stuttgart

1964 - 1972 Besuch des Karls-Gymnasiums
in Stuttgart mit Abschluß der
Reifeprüfung am 21.6.72

Studium:

WS 72/73 - SS 74 Studium an der Universität
Stuttgart in den Fächern
Mathematik und Physik

seit WS 74/75 Fortsetzung des begonnenen
Studiums an der Freien
Universität Berlin

WS 77/78 - SS 80 Tätigkeit als studentischer
Tutor am Fachbereich 19 der FU

WS 80/81 Abschluß des Studiums
mit der Diplom-Prüfung
am 27.3.1981

seit WS 81/82 wiss. Mitarbeiter am I. Institut
des Fachbereichs 19

